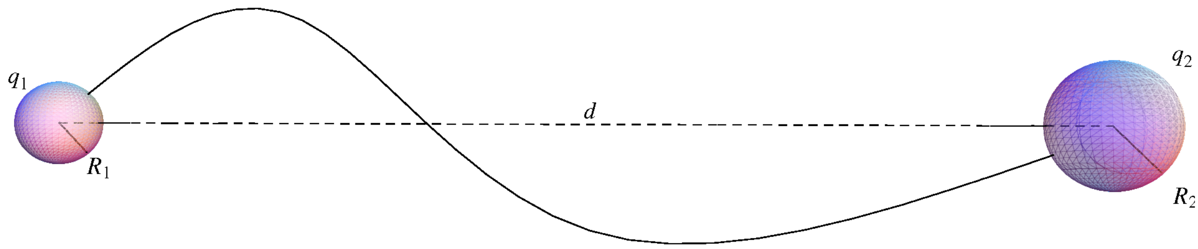
Serie III, Problema 3.3

Problema 3.3

Duas esferas condutoras estão ligadas por um longo fio condutor. A carga total é de $Q = 20 \times 10^{-6}\ C$. Uma esfera tem raio $R_1 = 4\,cm$ e a outra tem um raio $R_2 = 6\,cm$.

a) - Qual é o campo eléctrico à superfície de cada uma das esferas?

b) - Qual é o potencial eléctrico de cada uma das esferas?



Solução

QUESTÃO a) - Qual é a relação entre o campo eléctrico e as superfícies equipotenciais?

QUESTÃO b) - Como deve ser o campo eléctrico à superfície de um condutor? E no seu interior?

QUESTÃO c) - O que é que isso diz acerca das superfícies equipotenciais?

QUESTÃO d) - O que é que a Lei de Gauss permite dizer acerca do campo de uma distribuição de cargas com simetria esférica?

QUESTÃO e) - Qual é a relação entre a densidade superficial de carga e o campo eléctrico à superfície de um condutor?

- Lembre-se que se $\vec{a}$ for uma constante

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right) = -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^2}\,\vec{u}_{\vec{r}-\vec{a}} \equiv -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}\,(\vec{r}-\vec{a})$$

- Para uma distribuição discreta de cargas, o princípio de superposição e a Lei de Coulomb permitem concluir que o campo eléctrico deriva de um potencial $V[\vec{r}]$ através de $\vec{E} = -\nabla V$ onde

$$V[\vec{\boldsymbol{r}}] = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i\right|}$$

- De acordo com o enunciado vamos considerar que a relação entre cargas e distância d é tal que se podem desprezar os efeitos de influência electrostática duma esfera na outra. Isto significa que podemos considerar que a distribuição superficial de cargas em cada esfera é uniforme, ou seja as densidades superficiais σ_1 e σ_2 são constantes.

- Vimos já pela Lei de Gauss que o campo de uma distribuição de carga com simetria esférica é equivalente ao de uma carga pontual no centro de simetria. Assim o campo à superfície de cada esfera deve ser radial em relacão aos seus centros e com magnitudes respectivamente

$$E_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q_1}{R_1{}^2} \equiv \frac{\sigma_1}{\epsilon_o} \quad ; \qquad E_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q_2}{R_2{}^2} \equiv \frac{\sigma_2}{\epsilon_o} \quad ;$$

- Estes campos devem ser derivados dum potencial único $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ através de $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla V(\vec{\boldsymbol{r}})$, e pelo princípio de superposição podemos escrever, designando por $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ a posição dos centros das esferas,

$$V[\vec{\boldsymbol{r}}] = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q_1}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1\right|} + \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q_2}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_2\right|}$$

- Uma vez os condutores ligados e em equilíbrio electrostático, o seu potencial à superfície deve ser constante e igual nas duas esferas, $V_1 = V_2$, já que juntamente com o fio condutor passam a pertencer a uma superfície condutora única.

$$V_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{d}\right) \quad ; \qquad V_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{R_2}\right) \quad ;$$

- Como a carga inicial total se distribui pelas duas esferas deve-se ter, desprezando a que eventualmente ficaria no fio,

$$Q = q_1 + q_2$$

- Obtemos assim duas equações $\begin{cases} V_1 == V_2 \\ Q == q_1 + q_2 \end{cases} = \begin{cases} q_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d}\right) == q_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d}\right) \\ q_2 == Q - q_1 \end{cases}$ que podem ser resolvidas para q_1 e q_2:

$$\begin{cases} q_1 == \dfrac{Q\,R_1\left(1-\frac{R_2}{d}\right)}{R_1+R_2\left(1-\frac{2\,R_2}{d}\right)} \\[2ex] q_2 == \dfrac{Q\,R_2\left(1-\frac{R_1}{d}\right)}{R_1+R_2\left(1-\frac{2\,R_2}{d}\right)} \end{cases}$$

- No limite $d \gg R_1, R_2$ temos $\begin{cases} q_1 == \frac{Q R_1}{R_1+R_2} \\ \\ q_2 == \frac{Q R_2}{R_1+R_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{(R_1+R_2) R_1} \\ \\ \sigma_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{(R_1+R_2) R_2} \end{cases}$

- Assim se obtêm os campos

$$E_1 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q\left(1 - \frac{R_2}{d}\right)}{\left(R_2 + R_1\left(1 - \frac{2 R_2}{d}\right)\right) R_1} \xrightarrow{limite\, d \gg R_i} E_1 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q}{(R_2 + R_1) R_1} \quad ;$$

$$E_2 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q\left(1 - \frac{R_1}{d}\right)}{\left(R_2 + R_1\left(1 - \frac{2 R_2}{d}\right)\right) R_2} \xrightarrow{limite\, d \gg R_i} E_2 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q}{(R_2 + R_1) R_2} \quad ;$$

- E o potencial eléctrico comum dos condutores é

$$V_1 == V_2 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q\left(1 - \frac{R_1 R_2}{d^2}\right)}{\left(R_1\left(1 - \frac{2 R_2}{d}\right) + R_2\right)} \rightarrow V_1 == V_2 == \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{Q}{(R_1 + R_2)} \quad ;$$

- No caso concreto deste problema

$$\boxed{\begin{array}{l} q_1 == 8 \times 10^{-6} \quad (* \, C *) \\ \\ q_2 == 12 \times 10^{-6} \quad (* \, C \, *) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_1 == 45 \times 10^{6} \, (* \, \frac{V}{m} \, *) \\ \\ E_2 == 30 \times 10^{6} \, (* \, \frac{V}{m} \, *) \end{array}}$$

$$\boxed{V_1 == V_2 == 1.79 \times 10^{6} \qquad (* \, V \, *)}$$

Serie III, Problema 3.3

Apêndice: Influência eléctrica em condutores

Carga pontual na vizinhança de uma esfera condutora

Este problema tem uma solução exacta pelo método das imagens. Escolhendo o eixo $\vec{e}_z$ coincidente com a linha que une o centro da esfera condutora de raio a e a carga q, o potencial eléctrico devido à influência dessa carga externa à distância d do centro da esfera condutora pode ser considerado como derivado de uma carga pontual $q' = -\frac{a}{d}\, q$ sobre o eixo $\vec{e}_z$ à distância $b = \frac{a^2}{d}$ do centro da esfera condutora.

Justifique a afirmação anterior mostrando que é a única maneira de fazer $V = 0$ constante à superfície do condutor.

Se necessário pode-se adicionar uma carga q'' no centro da esfera sem alterar a condição fronteira deste problema que é a de manter a superfície da esfera condutora como uma equipotencial. Assim, se a esfera inicialmente estava isolada com carga total Q, a escolha $q'' = Q - q'$ garante que a sua carga se mantenha invariante. Alternativamente, se a esfera estiver ligada à terra, podemos assumir que o seu potencial é $V = 0$ e $q'' = 0$.

Esfera condutora ligada à terra.

- Posições e cargas

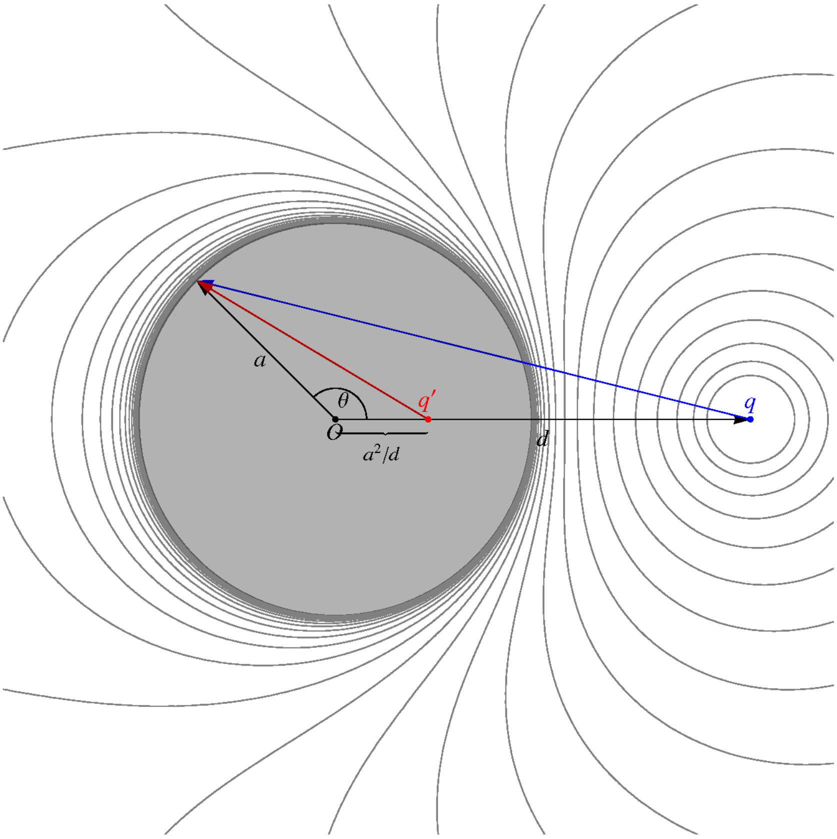
$$\vec{r}_q == \vec{d} = d\,\vec{e}_z \quad ; \qquad \vec{r}_{q'} == \vec{b} = \frac{a^2}{d}\,\vec{e}_z \quad ; \qquad q' = -\frac{a}{d}\,q \quad ;$$

- O potencial em todo o espaço fora da esfera é equivalente ao das duas cargas q (real) e q' (imagem).

$$V[\vec{r}] == \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{d}\right|} + \frac{q'}{\left|\vec{r}-\vec{b}\right|}\right)$$

- Expressão funcional:

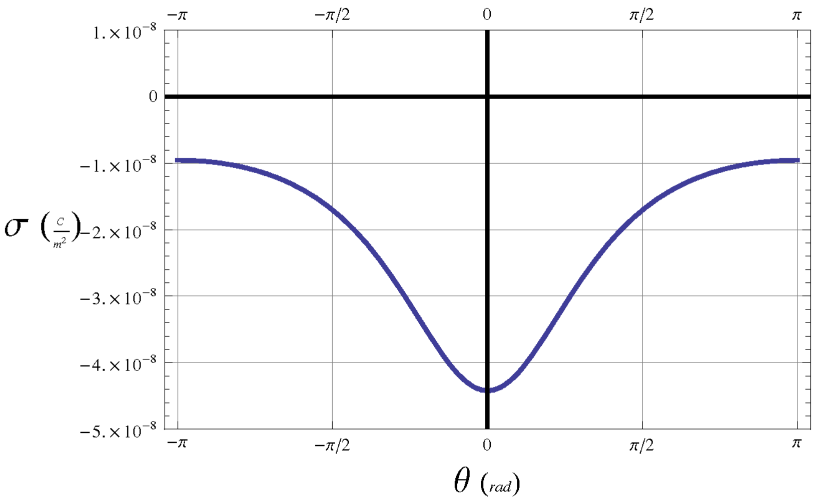
$$V[\mathrm{r\_}, \theta\_] := \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2\,r\,d\,Cos[\theta]}} - \frac{a/d}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2\,r\,\frac{a^2}{d}\,Cos[\theta]}}\right)$$



- A densidade superficial de carga é $\sigma = \epsilon_o \vec{E} \cdot \vec{n} = -\epsilon_o \vec{n} \cdot \nabla V[\vec{a}]$, onde $\vec{n} = \vec{e}_r[\theta]$ e $\vec{E} = \vec{E}[a, \theta]$ é o campo à superfície da esfera.

Campo Eléctrico à superfície da esfera condutora:

$$\vec{E}[a, \theta\_] := \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{a} \frac{a^2 - d^2}{\left(a^2 + d^2 - 2\, a\, d\, Cos[\theta]\right)^{3/2}} \vec{e}_r$$



Serie III, Problema 3.3

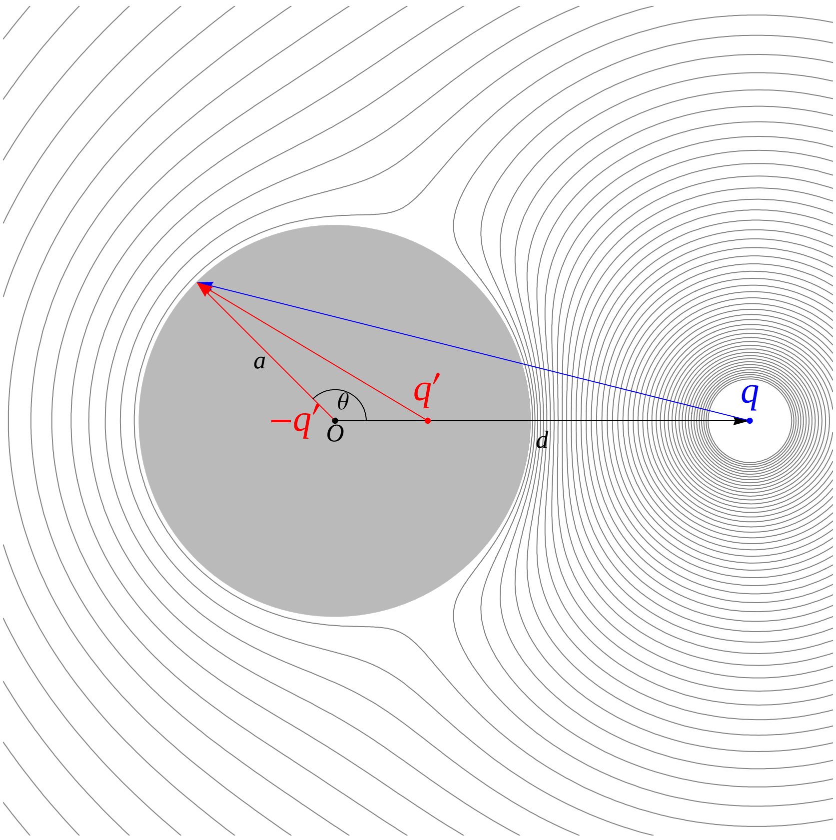
Esfera condutora isolada e neutra

- Se a esfera condutora estiver isolada e descarregada, então a adição de uma carga $q'' = -q'$ no centro da esfera não altera a forma da equipotencial à superfíce da esfera, apenas o seu valor. Assim o potencial em todo o espaço fora da esfera é equivalente ao das cargas q (real), q' (imagem) e q'' (imagem no centro).

$$V[\vec{\boldsymbol{r}}] == \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{q}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{d}}\right|}+\frac{q'}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{b}}\right|}+\frac{q''}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}\right|}\right)$$

- Expressão funcional:

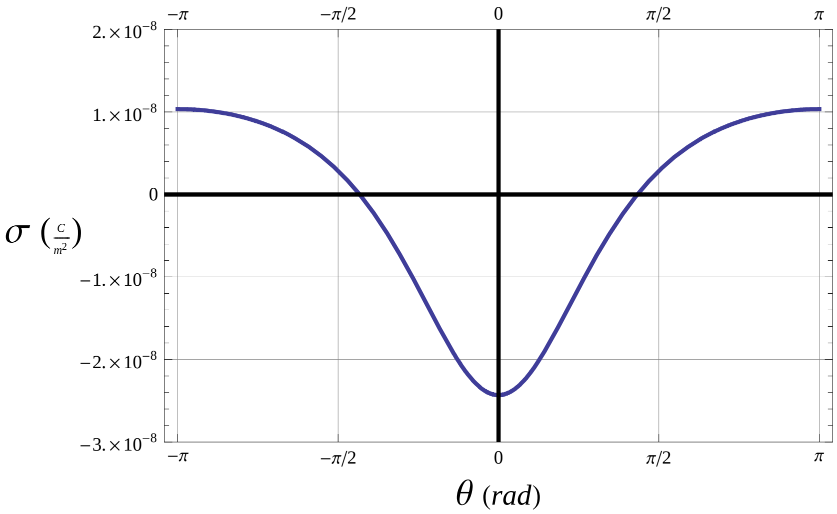
$$V[\mathrm{r\_},\,\theta\_] := \frac{q}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2\,r\,d\,Cos[\theta]}}-\frac{\frac{a}{d}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2\,r\,\frac{a^2}{d}\,Cos[\theta]}}+\frac{\frac{a}{d}}{r}\right)$$



- A densidade superficial de carga é $\sigma = \epsilon_o\,\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}} = -\epsilon_o\,\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla V[\vec{a}]$ onde $\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{e}}_r[\theta]$ e $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}[a,\,\theta]$ é o campo à superfície da esfera.

Campo Eléctrico à superfície da esfera condutora:

$$\vec{\boldsymbol{E}}[a, \theta\_] := \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{a}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2 - a^2}{\left(a^2 + d^2 - 2\,a\,d\,Cos[\theta]\right)^{3/2}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_r$$



Considere agora o seguinte problema. Uma esfera condutora descarregada é levada a entrar em contacto com uma esfera condutora de carga Q, e a seguir separada dela. Descreva o que acontece neste processo e qual a carga final com que cada uma fica. Qual é o potencial final a que as esferam ficam quando estão muito afastadas?

Serie III, Problema 3.4

Problema 3.4

Determine a capacidade de uma esfera metálica de 0.5 m de diâmetro (no vácuo).

Solução

- Como as linhas de campo dum condutor isolado se estendem indefinidamente, podemos considerar que a outra armadura do condensador está infinitamente distante e ao potencial $V_\infty = 0$. Assim a superfície do condutor funciona como a armadura dum condensador com uma diferença de potencial igual ao potencial constante do condutor.

- No caso duma esfera de raio R, e na ausência de outras cargas e campos, a distribuição das cargas à superfície é uniforme com densidade constante $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

- Vimos já que neste caso o campo gerado pela esfera é equivalente, fora dela, ao de uma carga pontual Q no seu centro. Assim o potencial à superfície deve ser igual a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{R} \qquad (* \text{ V } *)$$

- A capacidade C de um condensador é definida como a razão entre a carga Q armazenada numa armadura e a queda de potencial $\mathcal{V} = V - V_\infty$ suportada pelas armaduras. Neste caso

$$C == \frac{Q}{\mathcal{V}} = 4\pi\epsilon_o R \qquad (* \text{ Farad } *)$$

- Para o caso presente

$$C == \frac{1}{9}\times 10^{-9}\times\frac{1}{4} = 27.8\times 10^{-12} \quad (* \text{ Farad } *)$$

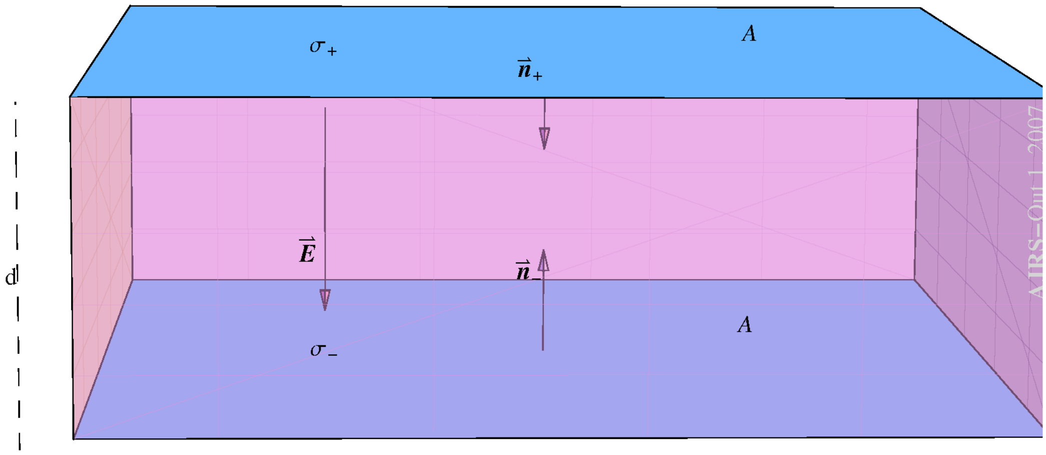
Serie III, Problema 4.1

Problema 4.1

Um condensador é feito com duas placas paralelas rectangulares de dimensões $2\,cm$ por $3\,cm$, que estão separadas por $1\,mm$ de papel. ($\epsilon_r = 3.7$, $E_{max} = 16 \times 10^6\ \frac{V}{m}$)

a) - Qual é a sua capacidade?

b) - Qual é a carga máxima que pode ser colocada nesse condensador?



Solução

Alinea a)

- O campo à superfície de um plano uniforme de carga é semelhante ao do centro de um disco carregado com densidade superficial σ, que vimos já ser orientado na direcção $\vec{n}$ normal à superfície:

$$\vec{E}_s = \frac{\sigma}{2\,\epsilon}\vec{n}$$

- Num condensador plano, desprezando os efeitos fronteira, desde que a separação d entre as armaduras seja pequena comparada com as dimensões lineares desta, ou seja $d \ll \sqrt{A}$, podemos considerar que o campo no seu interior é constante e igual à sobreposição dos campos das duas armaduras, com cargas Q e $-Q$ que se distribuem sobre a área A em cada armadura.

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{Q}{A}$$

- Dentro do condensador a permitividade eléctrica é $\epsilon = \epsilon_r\,\epsilon_o$, e as normais às armaduras são opostas, $\vec{n}_+ == -\vec{n}_-$, pelo que os campos se adicionam devido à polaridade diferente das cargas

$$\vec{E}[\vec{r}_{int}] == \vec{E}_+[\vec{r}_{int}] + \vec{E}_-[\vec{r}_{int}] == \frac{\sigma_+}{2\,\epsilon}\,\vec{n}_+ + \frac{\sigma_-}{2\,\epsilon}\,\vec{n}_- == \frac{Q}{\epsilon\,A}\,\vec{n}_+$$

Como deve ser o campo fora do condensador e na sua vizinhança?

- Conhecido o campo $\vec{E}[\vec{r}_{int}]$ podemos determinar o potencial $V[\vec{r}_{int}]$ que lhe está associado através de $\vec{E}[\vec{r}_{int}] = -\nabla V[\vec{r}_{int}]$. Neste caso, fazendo $\vec{n}_+ = -\vec{e}_z$, obtemos imediatamente

$$V\left[z\,\vec{e}_z\right] = \frac{Q}{\epsilon\,A}\,z + V_o$$

- A queda de potencial entre as armaduras separadas por uma distância d é assim

$$\mathcal{V} = V\left[d\,\vec{e}_z\right] - V_o = \frac{Q}{\epsilon\,A}\,d$$

- A capacidade do condensador é pela definição

$$C == \frac{Q}{\mathcal{V}} == \frac{\epsilon\,A}{d}$$

- No caso concreto deste problema

$$dims = \begin{cases} d \to 10^{-3} & m \\ A \to 6\times10^{-4} & m^2 \\ \epsilon \to \frac{3.7}{36\,\pi}\times10^{-9} & \frac{A\,s}{m\,V} \end{cases} \qquad // \#[[1]]^{T}[[1]]\ \&;$$

$$C == \frac{3.7\times10^{-9}\times6\times10^{-4}}{36\,\pi\times10^{-3}} = 19.6\times10^{-12}\ (*\ \text{Farad}\ *)$$

Alínea b)

- O papel é um dielétrico que resiste à condução para campos inferiores a um máximo E_{max}, designado campo de rotura, a partir do qual o papel permite o fluxo de corrente entre as duas armaduras, descarregando-as efectivamente. Sabendo que a relação entre a densidade superficial de carga e o campo é $\epsilon\,E = \sigma$, obtemos no máximo

$$\sigma_{max} = \epsilon\,E_{max}$$

$$Q_{max} = \epsilon\,E_{max}\,A$$

- Para o caso concreto do papel com $E_{max} = 16\times10^{6}\ \frac{V}{m}$ obtemos

$$Q_{max} == 314\times10^{-9}\quad (*\ \text{C}\ *)$$