Problema 4.4

Um condensador de placas paralelas tem uma área $A = 0.1\, m^2$ e uma distância entre placas de $d = 3\, mm$. A meio no seu interior está uma placa de nylon de espessura $s = 1\, mm$. A constante dielétrica relativa do nylon é $\epsilon_r = 3.4$, e suporta um campo eléctrico máximo de $14 \times 10^6\ \frac{V}{m}$. A constante dielétrica relativa do ar é $\epsilon_r = 1.00059 \sim 1$ e suporta um campo eléctrico máximo de $3 \times 10^6\ \frac{V}{m}$. Uma das armaduras tem uma carga $Q = 1.5 \times 10^{-8}\, C$ (a outra tem uma carga $-Q$).

a) - Calcule o campo eléctrico no ar e no nylon dentro do condensador.

b) - Qual é a capacidade do condensador?

c) - Qual é a energia armazenada nesse condensador?

d) - Qual é a maior carga que esse condensador pode armazenar sem correr riscos de uma descarga?

e) - Estando o condensador em circuito aberto, o que acontece à diferença de potencial entre as armaduras quando a placa de nylon é retirada?

f) - Qual é o trabalho que é preciso efectuar para retirar essa placa de nylon?

a) - Calcule o campo eléctrico no ar e no nylon dentro do condensador.

Como deve variar o campo eléctrico $\vec{E}$ ao passar do ar para o nylon?

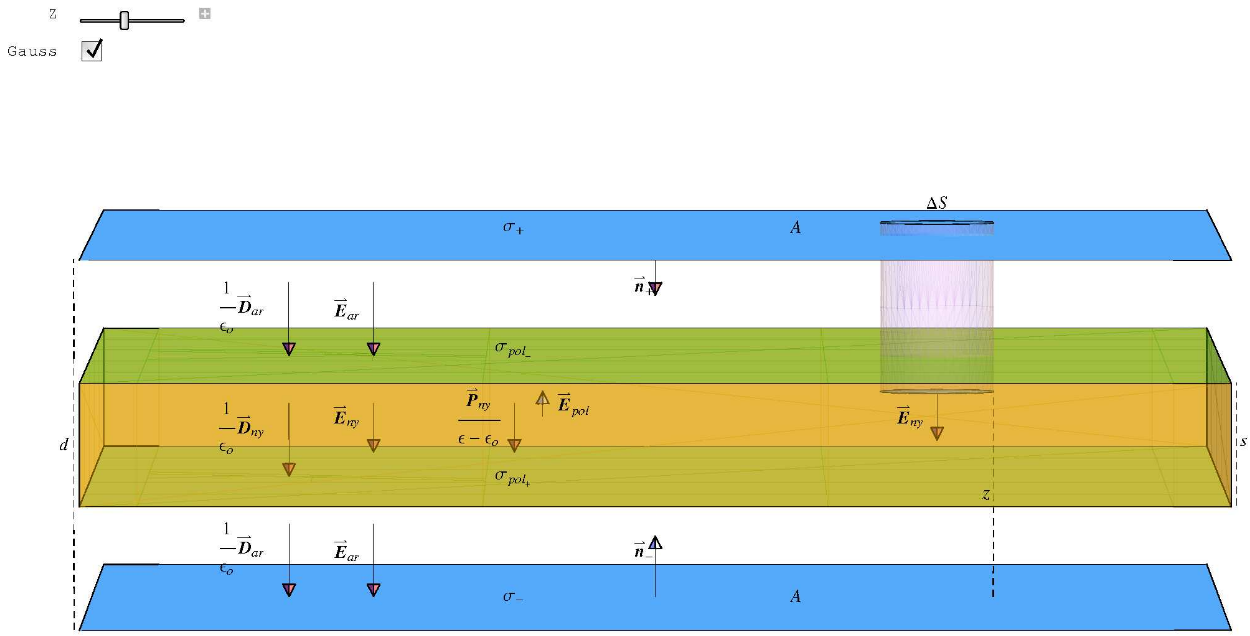
Como deve variar o campo de deslocamento eléctrico $\vec{D}$ ao passar do ar para o nylon?

Qual é a relação entre $\vec{P}$ e o deslocamento eléctrico $\vec{D}_{ny}$?

Qual é a relação entre $\vec{P}$ e o campo eléctrico $\vec{E}_{ny}$?

Qual é a relação entre a densidade das cargas superficiais de polarização σ_{pol} e a polarização $\vec{P}$?

Em que sentido aponta o campo $\vec{E}_{pol}$ de polarização? E o vector de polarização $\vec{P}$?



Condensador Plano com dielétrico de ar+nylon+ar.

- **Qual é a densidade de carga $\sigma_{\pm}$ nas armaduras do condensador?**

  - Assumindo uma distribuição uniforme de carga nas armaduras do condensador, podemos desde já determinar que

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{Q}{A}$$

- **Como é o campo dentro do condensador plano ?**

  - Dado que $\sqrt{A} = 0.3\, m \gg d = 0.003\, m$ vamos assumir que o campo interno no condensador é aproximadamente invariante para deslocamentos horizontais. Desprezando variações nas fronteiras, o campo deve ser vertical em todos os pontos no interior.

  - Podemos usar a Lei de Gauss para determinar os campos às diversas alturas z a partir da armadura inferior.

$$\Phi_{cyl} = \oiint_{cyl} \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_c \qquad ou \qquad \Phi_{cyl} = \oiint_{cyl} \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_c}{\epsilon}$$

  - O vector deslocamento eléctrico $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ relaciona-se com a carga livre Q_c (carga de condução) dentro do cylindro de Gauss. A vantagem de usar a primeira forma da lei de Gauss é que não existe referência explícita à constante dielétrica do meio (se houvesse contribuições para o fluxo devidas a campos em meios diferentes, que ϵ se usaria na lei de Gauss?).

  - O produto escalar $\vec{D} \cdot \vec{n}$ (ou de $\vec{E} \cdot \vec{n}$) em qualquer ponto da superfície lateral do cilindro é zero porque o campo é vertical e $\vec{n}$ horizontal. Só nas bases do cilindro é que $\vec{E}$ e $\vec{n}$ são colineares, mas na base superior não há campo ($\vec{E} = 0$) se a colocarmos acima da armadura positiva. Assim o fluxo reduz-se ao da base inferior à altura z.

$$\Phi_{cyl}[z] == \vec{D}[z] \cdot \vec{n}\, \pi\, r^2 == \sigma_+\, \pi\, r^2 \qquad \therefore \qquad \vec{D}[z] == \sigma_+\, \vec{n}_+$$

- Neste caso verifica-se que não existe dependência explícita em z, ou seja $\vec{D}$ é constante em todo o condensador. Num dielétrico com permitividade relativa $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_o}$ o campo eléctrico deve ser

$$\vec{E} == \frac{1}{\epsilon_r\, \epsilon_o} \vec{D} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} \vec{E}_{ar} == \frac{\sigma_+}{\epsilon_o} \vec{n}_+ \equiv \frac{Q}{\epsilon_o\, A} \vec{n}_+ & no\ ar\ \epsilon_r \approx 1 \\ \vec{E}_{ny} == \frac{\sigma_+}{\epsilon_r\, \epsilon_o} \vec{n}_+ \equiv \frac{Q}{\epsilon_r\, \epsilon_o\, A} \vec{n}_+ & no\ nylon \end{cases}$$

- Para os valores dados

$$\begin{cases} \vec{E}_{ar} == 4\pi \times 9 \times 10^9\ \frac{1.5\times10^{-8}}{10^{-1}} \vec{n}_+ & E_{ar} = 16.964 \times 10^3\ (*\ \frac{V}{m}\ *) \\ \vec{E}_{ny} == 4\pi \times 9 \times 10^9\ \frac{1.5\times10^{-8}}{3.4\times10^{-1}} \vec{n}_+ & E_{ny} = 4.989 \times 10^3\ (*\ \frac{V}{m}\ *) \end{cases}$$

b) - Qual é a capacidade do condensador?

- A capacidade dum condensador é a razão entre a carga armazenada e a queda de potencial $\mathcal{V} = V_+ - V_-$ entre as armaduras.

$$C == \frac{Q}{\mathcal{V}} \qquad (*\ F *)$$

- Uma forma simples de resolver consiste em notar que $E_{ar}\, \frac{d}{3} = -\Delta V_{ar}$ e $E_{ny}\, \frac{d}{3} = -\Delta V_{ny}$ em cada segmento do condensador, pelo que

$$\mathcal{V} == -2\, \Delta V_{ar} - \Delta V_{ny} == -\left(2\, E_{ar} + E_{ny}\right) \frac{d}{3}$$

- Substituindo os valores de E_{ar} e E_{ny} determinados antes obtém-se a definição de C

$$C == \frac{3\, Q}{\left|2\, E_{ar} + E_{ny}\right| d} == \frac{3\, \epsilon_r}{(2\, \epsilon_r + 1)}\ \frac{\epsilon_o\, A}{d}$$

- Para uma solução mais completa note que o potencial associado ao campo $\vec{E}_{ar}$ é tal que $-\nabla V_{ar} = \vec{E}_{ar}$. Para um campo constante na direcção $\vec{n}_+ = -\vec{e}_z$ deve-se ter

$$V_{ar}[z] == V_0 + \frac{Q}{\epsilon_o\, A} z \qquad para\ z \in \left[\frac{2}{3} d,\ d\right]. \qquad ;$$

- Dentro do nylon o potencial associado ao campo $\vec{E}_{ny}$ é

$$V_{ny}[z] == V_1 + \frac{Q}{\epsilon_r\, \epsilon_o\, A} z \qquad para\ z \in \left[\frac{1}{3} d,\ \frac{2}{3} d\right]. \qquad ;$$

Na região do ar abaixo do nylon o campo volta a ser $\vec{E}_{ar}$ e o potencial associado é

$$V_{ar}[z] = V_2 + \frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, z \qquad\qquad para\, z \in \left[0, \frac{1}{3}\, d\right]. \qquad ;$$

- Como o potencial $V[z]$ deve ser uma função contínua, nas regiões fronteira deve-se ter coincidência para os valores do potencial de cada lado.

$$V_{ar}[d] == V_+ \qquad \therefore \qquad V_+ - V_0 = \frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d$$

$$V_{ar}\left[\frac{2}{3}\, d\right] == V_{ny}\left[\frac{2}{3}\, d\right] \qquad \therefore \qquad V_0 - V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d$$

$$V_{ny}\left[\frac{1}{3}\, d\right] == V_{ar}\left[\frac{1}{3}\, d\right] \qquad \therefore \qquad V_1 - V_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d$$

$$V_{ar}[0] == V_- \qquad \therefore \qquad V_2 - V_- = 0$$

- As constantes nas expressões do potencial ficam assim determinadas

$$V_2 = V_-$$

$$V_1 = V_- - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d$$

$$V_0 = V_- + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d$$

$$V_+ = V_- + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\epsilon_r} + 2\right)\frac{Q}{A\, \epsilon_o}\, d$$

- A queda de potencial entre armaduras $\mathcal{V} = V_+ - V_-$ é

$$\mathcal{V} == V_+ - V_- == \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q}{\epsilon_O\, A}\, d \qquad \therefore$$

$$\mathcal{V} == \frac{1}{3} \times \left(2 + \frac{1}{3.4}\right) \times 4\,\pi \times 9 \times 10^9 \times \frac{1.5 \times 10^{-8}}{10^{-1}} \times 3 \times 10^{-3} == 38.92 \qquad (*\ V\ *)$$

- A capacidade requerida é

$$C == \frac{Q}{\mathcal{V}} == \frac{3\, \epsilon_r\, \epsilon_o\, A}{(2\, \epsilon_r + 1)\, d} \qquad \therefore$$

$$C == \frac{3 \times 3.4 \times \frac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9} \times 10^{-1}}{(2 \times 3.4 + 1) \times 3 \times 10^{-3}} == 3.85 \times 10^{-10} \qquad (*\ F\ *)$$

Qual é a energia armazenada nesse condensador?

- A energia armazenada num condensador corresponde ao trabalho realizado contra o seu campo interno para separar as cargas que estão nas armaduras. Assim, se a carga na armadura positiva é Q e a queda de potencial é $\mathcal{V}$, então a energia total é, tendo em conta que $C = \frac{Q}{\mathcal{V}}$

$$\mathcal{W} == \int_0^Q \mathcal{V}(q)\, dq == \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq == \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} == \frac{1}{2} C\,\mathcal{V}^2 == \frac{1}{2}\mathcal{V}\,Q$$

- Tendo obtido $\mathcal{V}$ e C na alínea anterior basta substituir em qualquer das expressões equivalentes

$$\mathcal{W} == \frac{1}{2}\mathcal{V}\,Q == \frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q^2}{\epsilon_o A}\, d$$

$$\mathcal{W} == = \frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{3.4}\right)\times 4\pi\times 9\times 10^9\times\frac{(1.5\times 10^{-8})^2}{10^{-1}}\times 3\times 10^{-3} == 2.92\times 10^{-7}\ (* J *)$$

$$\mathcal{W} == \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} == \frac{1}{2}\frac{(1.5\times 10^{-8})^2}{3.85\times 10^{-10}} == = 2.92\times 10^{-7}\quad (* J *)$$

$$\mathcal{W} == \frac{1}{2} C\,\mathcal{V}^2 == \frac{1}{2}\times 3.85\times 10^{-10}\times (38.92)^2 == 2.92\times 10^{-7}\ \ (* J *)$$

Como faria para calcular a energia associada ao campo eléctrico do condensador?

- Note-se que a energia pode ser considerada como existente no campo eléctrico, com densidade $w[\vec{r}] = \frac{1}{2}\vec{E}[\vec{r}]\cdot\vec{D}[\vec{r}]$. Assim, dado que neste caso $\vec{D}[\vec{r}] = \sigma_+\,\vec{n}_+$ é constante dentro de todo o condensador, e zero fora dele, é fácil calcular a energia total tendo em conta $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D}$ e o volume $\mathfrak{V}_{ar} = 2\,\mathfrak{V}_{ny} = 2\,A\,\frac{d}{3}$:

$$\mathcal{W} == \int_{Vol.\,tot.} w[\vec{r}]\, d\mathfrak{V} == \int_{Vol.\,tot.} \frac{1}{2\,\epsilon}\left|\vec{D}\right|^2 d\mathfrak{V} == \frac{\sigma_+^2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_o}\mathfrak{V}_{ar}+\frac{1}{\epsilon}\mathfrak{V}_{ny}\right) = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{\epsilon_r}\right)\left(\frac{Q}{A}\right)^2\frac{A}{\epsilon_o}\frac{d}{3} == \frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{Q^2}{\epsilon_o A}\, d$$

d) - Qual é a maior carga que esse condensador pode armazenar sem correr riscos de uma descarga?

- O campo de descarga do condensador é o menor dos campos máximos suportados pelos seus dielétricos. Neste caso $E_{ar\,max} = 3\times 10^6\,\frac{V}{m}$, o que significa que a carga na armadura positiva se mantém para valores inferiores a este. Como $E_{ar} = \frac{\sigma_+}{\epsilon_o} = \frac{Q}{\epsilon_o A}$ obtemos para a máxima carga no condensador

$$Q_{max} == \epsilon_o\,A\,E_{ar\,max} == \frac{1}{4\pi\times 9}\times 10^{-9}\times 10^{-1}\times 3\times 10^6 == 2.65\times 10^{-6}\qquad (* C *)$$

- Esta carga não é suficiente para danificar o condensador porque o campo dentro do nylon para esta carga é

$$E_{ny} = \frac{Q_{max}}{\epsilon_r\,\epsilon_o\,A} = \frac{1}{\epsilon_r}E_{ar\,max} \ll E_{ny\,max}$$

Assim a descarga não passa através do nylon. De facto seria necessária uma carga muito maior para causar a rotura no nylon

$$Q_{rot} = \epsilon_r \epsilon_o A E_{ny\,max} = 3.4 \times \frac{1}{4\pi \times 9} \times 10^{-9} \times 10^{-1} \times 14 \times 10^6 == 42 \times 10^{-6} \quad (* C *)$$

e) - Estando o condensador em circuito aberto, o que acontece à diferença de potencial entre as armaduras quando a placa de nylon é retirada?

- Em circuito aberto as armaduras estão isoladas, e portanto a sua carga mantém-se invariante. Assim, quando a placa de nylon é retirada, a queda de potencial entre as armaduras passa a ser a de um condensador com capacidade $C_{ar} = \frac{\epsilon_o A}{d}$

$$\mathcal{V}_{ar} == \frac{Q}{C_{ar}} == \frac{Q}{\epsilon_o A} d == 50.89 \; (* V *)$$

- Este valor é maior que o anterior $\mathcal{V} == \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{\epsilon_o A} d ==$ 38.92 V. A diferença de potencial entre as armaduras aumenta.

f) - Qual é o trabalho que é preciso efectuar para retirar essa placa de nylon?

- Como vimos que a diferença de potencial no condensador aumenta quando se retira o nylon em circuito aberto, isso significa que a energia armazenada também aumenta, ou seja agora

$$\mathcal{W}_{ar} == \frac{1}{2} Q \mathcal{V}_{ar} == \frac{1}{2} \times 1.5 \times 10^{-8} \times 50.89 \;== 3.81 \times 10^{-7} \; (* J *)$$

- A diferença de energia armazenada só pode ser justificada como o trabalho realizado sobre o condensador para retirar o dieléctrico. Assim

$$\Delta\mathcal{W} == \mathcal{W}_{ar} - \mathcal{W} == 3.817 \times 10^{-7} - 2.918 \times 10^{-7} \; (* J *) == 8.98 \times 10^{-8} \; (* J *)$$

Apêndice: Solução alternativa

- A capacidade do condensador com o nylon retirado x metros na direcção $\vec{e}_x$ pode ser calculada como a de dois condensadores em paralelo, um com nylon e área $A_1[x] = (A - x\,\ell)$ e outro só com ar e área $A_2[x] = x\,\ell$, onde ℓ é a largura da armadura (dimensão na direcção $\vec{e}_y$). A capacidade dos dois é a soma das capacidades de cada um, e assim

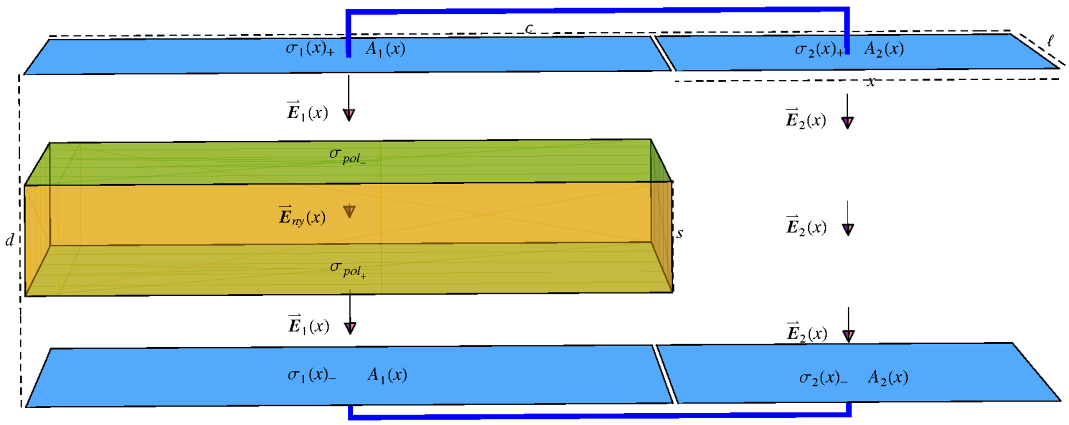
$$C[x] == C_1[x] + C_2[x] == \frac{3\epsilon_r \epsilon_o A_1[x]}{(2\epsilon_r + 1) d} + \frac{\epsilon_o A_2[x]}{d} ==$$

$$\frac{(1-\epsilon_r)\epsilon_o \ell}{d(1+2\epsilon_r)} x + \frac{3 A \epsilon_o \epsilon_r}{d(1+2\epsilon_r)} == \alpha x + \beta$$

$$\alpha == \frac{(1-\epsilon_r)\epsilon_o \ell}{d(1+2\epsilon_r)} \quad ; \quad \beta == \frac{3 A \epsilon_o \epsilon_r}{d(1+2\epsilon_r)}$$

$A_1[x] = A - x \times \ell$; $A_2[x] = x \times \ell$; $A = \ell \times c$

x



- Como as armaduras ligadas dos condensadores partilham a mesma equipotencial, então o campo $\vec{E}_2[x]$ deve ser tal que a queda de potencial $\mathcal{V}_2[x] = \mathcal{V}_1[x]$, ou seja $E_2[x]\, d = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{\sigma_1[x]}{\epsilon_o}\, d$. Daqui se conclui que $E_2[x] = \frac{\sigma_2[x]}{\epsilon_o} = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{\sigma_1[x]}{\epsilon_o}$, onde $\sigma_1[x]$ representa a densidade de carga nas armaduras do condensador com nylon, e $\sigma_2[x]$ a densidade de carga no condensador sem nylon. Assim tem-se que

$$\sigma_2[x] == \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\epsilon_r}\right)\sigma_1[x]$$

- Por outro lado, em circuito aberto a carga nas armaduras tem que permanecer invariante, ou seja $Q = \sigma_1[x]\,(A - x\,\ell) + \sigma_2[x]\, x\,\ell$ donde se conclui que

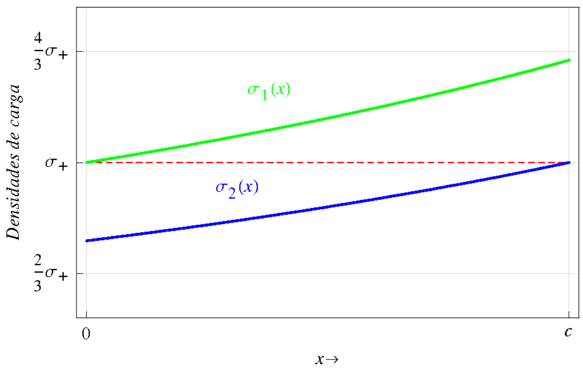
$$\sigma_1[x] = \frac{3\,Q}{3\,A - x\,\ell\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x\,\ell}{3\,A}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)}\,\sigma_+$$

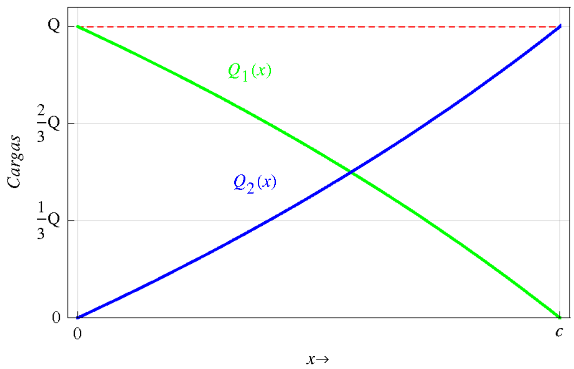
- Como $\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_o}\,\vec{e}_z$ e $\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2(x)}{\epsilon_o}\,\vec{e}_z$ obtém-se

In[53]:= $$\vec{E}_1[\mathrm{x\_}] := -\frac{1}{1-\frac{x\,\ell}{3\,A}\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)}\,\frac{Q}{\epsilon_o\,A}\,\vec{e}_z \qquad /.\ \ell \to \sqrt{A}\ \ /.\ dims\ /.\ SIUnits$$

$$\vec{E}_2[\mathrm{x\_}] := -\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{1}{1-\frac{x\,\ell}{3\,A}\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)}\,\frac{Q}{\epsilon_o\,A}\,\vec{e}_z \qquad /.\ \ell \to \sqrt{A}\ \ /.\ dims\ /.\ SIUnits$$

- Os gráficos seguintes mostram como variam as densidades de carga $\sigma_1[x]$ e $\sigma_2[x]$, e desde logo se vê que, à medida que x aumenta, aumenta também a densidade de carga $\sigma_1[x]$. Isto significa que, embora a carga total na área $A - x\,\ell$que cobre o nylon diminua progressivamente, há cargas que são puxadas da parte da armadura que fica progressivamente a descoberto para aumentar a densidade de carga $\sigma_1[x]$. Assim o campo e o potencial em ambas armaduras aumenta progressivamente até ao valor final. O trabalho realizado ao retirar o nylon é usado neste processo de elevar as cargas para um patamar mais alto do potencial. Como se pode ver, com o nylon parcialmente retirado as cargas de polarização $\sigma_{pol_\pm}$ têm oportunidade de exercer forças atractivas com componentes horizontais sobre as cargas nas armaduras livres, e como tal deslocam algumas delas no sentido de aumentar a densidade de carga $\sigma_1[x]$, o que é feito contra uma "pressão electroestática" no sentido contrário, i.e. no sentido de diluir ao máximo as cargas pelo espaço disponível. Por outro lado é contra esta força electrostática que o trabalho mecânico deve ser realizado.





- Assim, ao retirar o dieléctrico de nylon estamos a fazer variar contínuamente a capacidade do condensador, que varia linearmente com x na forma $C[x] = \alpha\,x + \beta$, e como a sua energia armazenada é $\mathcal{W} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ obtemos para uma pequena variação de C que

$$d\mathcal{W} == -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\,dC$$

- A expressão para a variação de energia armazenada passa assim a escrever-se em função de x como

$$d\mathcal{W}[x] == -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(\alpha\,x\ +\beta)^2}\,\alpha\,dx == \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Desta expressão deduzimos que a força sobre o dieléctrico de nylon que realiza este trabalho é

$$\vec{F}[x] = -\frac{1}{2}\frac{\alpha\,Q^2}{(\alpha\,x\ +\beta)^2}\,\vec{e}_x == \frac{\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\left(2+\frac{1}{\epsilon_r}\right)Q^2\,\ell\,d}{2\,\epsilon_o\left(3\,A\ -x\,\ell\left(1-\frac{1}{\epsilon_r}\right)\right)^2}\,\vec{e}_x$$

- Se assumirmos que x varia entre 0 e o comprimento c, o trabalho total para extrair o nylon será

$$\Delta\mathcal{W} == \int d\mathcal{W}[x] == -\frac{1}{2}Q^2\int_0^c \frac{1}{(\alpha\,x+\beta)^2}\,\alpha\,dx == \frac{1}{2}Q^2\left[\frac{1}{\alpha\,x+\beta}\right]_0^c == \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{\alpha\,c+\beta}-\frac{1}{\beta}\right)$$

- Mas $\alpha\,c = \frac{(1-\epsilon_r)\,\epsilon_o\,A}{d\,(1+2\,\epsilon_r)}$ e $\beta = \frac{3\,A\,\epsilon_o\,\epsilon_r}{d\,(1+2\,\epsilon_r)}$pelo que

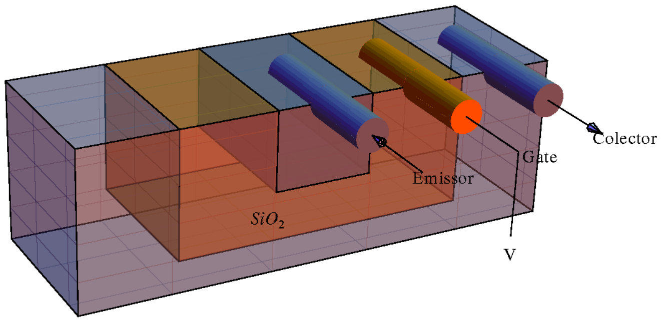
$$\Delta\mathcal{W} == \frac{(\epsilon_r-1)}{6\,\epsilon_r}\,\frac{Q^2}{\epsilon_o\,A}\,d == \frac{(3.4-1)}{6\times 3.4}\times 4\,\pi\times 9\times 10^9\times\frac{\left(1.5\times 10^{-8}\right)^2}{10^{-1}}\times 3\times 10^{-3} == 8.98\times 10^{-8} \qquad (*\,J\,*)$$

Problema 4.3

Considere a região de "gate" de um transistor num microprocessador recente. E constituída por duas camadas metálicas de dimensões de $0.1\,\mu m$ por $0.5\,\mu m$, separadas por uma camada de óxido de silício com uma espessura de $1.5\,nm$ e uma constante dielétrica $\epsilon_r = 3.5$ do semi-condutor. A diferença de potencial aplicada é da ordem de $1.5\,V$. Para este problema considere que se trata de um condensador de placas paralelas de área $0.1\,\mu m$ por $0.5\,\mu m$.

- Qual é a capacidade do condensador?

- Quantos electrões se encontram na armadura quando é aplicada a diferença de potencial de $1.5\,V$?



Esquema de um transistor real.

Qual é a capacidade do condensador?

- A área das armaduras é

$$A == 10^{-1}\times 10^{-6}\times 5\times 10^{-1}\times 10^{-6} == 5\times 10^{-14} \qquad (*\,m^2\,*)$$

- A separação entre armaduras é

$$d == 1.5\times 10^{-9} \quad (*\,m\,*)$$

- A capacidade de um condensador plano é

$$C == \frac{\epsilon\, A}{d} \equiv \frac{\epsilon_r\, \epsilon_o\, A}{d} \qquad \therefore \qquad C == 3.5\times\frac{1}{4\,\pi\,\times 9}\times\frac{10^{-9}\times 5\times 10^{-14}}{1.5\times 10^{-9}} == 1.031\times 10^{-15} \quad (* \; F \; *)$$

Quantos electrões se encontram na armadura quando é aplicada a diferença de potencial de 1.5 *V*?

- Para a capacidade encontrada e a diferença de potencial aplicada de $\mathcal{V} = 1.5\;\; V$ deve existir uma carga total na armadura negativa de

$$-Q == -\,\mathcal{V}\, C == -1.5\;\times 1.031\times 10^{-15} == -1.5465\times 10^{-15} \qquad (* \; C \; *)$$

- Dado que um electrão possui uma carga elementar de $q_e = -1.602176462\;\times 10^{-19}\; C$, deve-se obter

$$N_e == \frac{-Q}{q_e} == \frac{-1.5465\times 10^{-15}}{-1.602176462\;\times 10^{-19}} \approx 9652\;\; \textit{electrões}$$