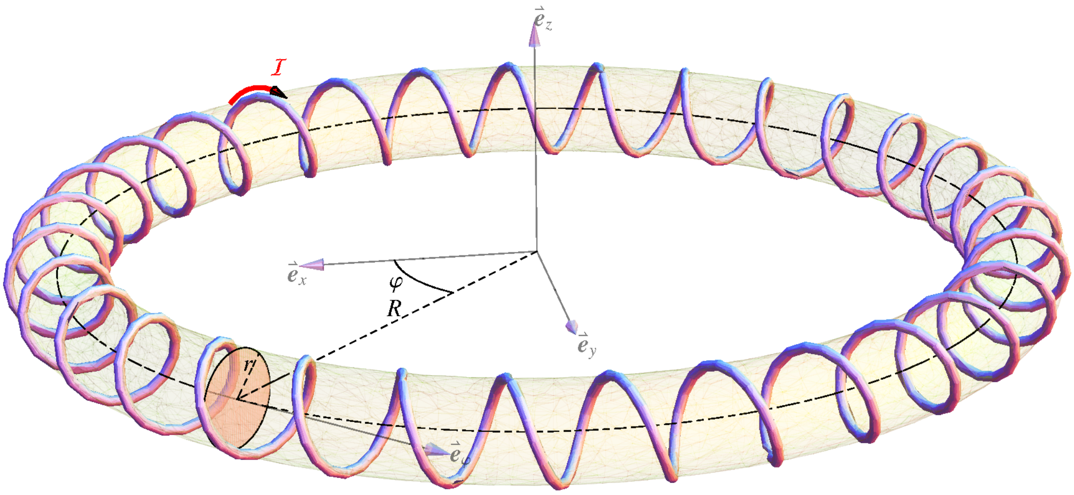
Problema 9.1

Uma bobina toroidal, com $1\,m$ de raio exterior e $20\,cm$ de raio interior, é percorrida por uma corrente de $5.0\,A$ e tem 60 espiras por metro. No centro tem ferro que nestas condições se pode supor como tendo uma permeabilidade magnética $\mu = 5000\,\mu_o$.

- Qual seria o campo na ausência do ferro? Qual é a indutância desta bobina?
- Qual é o campo magnético com o ferro? Qual é a indutância desta bobina?

Solução



- O comprimento total da bobina é $L = 2\,\pi\,R = 6.28\,m$ pelo que o número total de espiras é $N = 60 \times L = 377$.
- No interior da bobina, dado que o raio exterior $R = 1\,m$ é muito maior que o raio interior $r = 0.2.\,m$, vamos considerar que o campo $\vec{B}$ é aproximadamente constante em cada secção recta da bobina. Obviamente, devido à simetria de rotação em torno do eixo do toro, o campo numa secção obtém-se do campo de qualquer outra secção através da rotação que converte uma na outra. A utilização da Lei de Ampère ao longo duma circunferência γ de raio R passando pelo centro do toro permite-nos determinar a componente azimutal $B_\varphi\,\vec{e}_\varphi$ do campo $\vec{B}$. Em coordenadas cilíndricas $\{\rho,\ \varphi,\ z\}$ com eixo $\vec{e}_z$ coincidente com o eixo do toro devemos escrever, parametrizando a circunferência γ com o ângulo azimutal $\varphi \in [0,\,2\,\pi]$:

$\vec{r}_\gamma == R\,\vec{e}_\rho[\varphi] \equiv R\,\{Cos[\varphi],\,Sin[\varphi],\,0\}$; *ponto sobre a circumferência γ* ;

$d\,\vec{r}_\gamma == R\,d\,\varphi\,\vec{e}_\varphi[\varphi] \equiv R\,d\,\varphi\,\{-Sin[\varphi],\,Cos[\varphi],\,0\}$; *trajecto infinitesimal sobre a circumferência γ* ;

$\oint_\gamma \vec{B}[\vec{r}_\gamma]\cdot d\,\vec{r}_\gamma == \int_0^{2\,\pi} B_\varphi[R,\,\varphi,\,0]\,R\,d\,\varphi == B_\varphi[R]\,2\,\pi\,R$; *pela simetria axial B_φ não depende de φ* ;

$B_\varphi[R]\,2\pi R == \mu_o\, N\, \mathcal{I}$; *N é o número total de espiras na bobina* ;

$B_\varphi[R] == \mu_o \dfrac{\mathcal{N}\,\mathcal{I}}{2\pi R} == 4\pi\times 10^{-7}\times\dfrac{377\times 5}{2\pi\times 1} \approx 3.7\,(*\,G\,*)$; *magnitude da componente de $\vec{\boldsymbol{B}}$ na direcção $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$* ;

- Em qualquer outro ponto no interior da bobina assumimos que B_φ tem a mesma magnitude que $B_\varphi[R]$. Para o fluxo do campo através de uma secção recta da bobina ($\vec{\boldsymbol{S}} = S\,\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$) correspondente a uma só espira obtemos

$$\phi == \int\!\!\int_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = B_\varphi[R]\,S == \mu_o \frac{\mathcal{N}\,\mathcal{I}}{2\pi R}\,\pi r^2$$

- Como as linhas de campo atravessam de forma semelhante todas as $\mathcal{N}$ espiras da bobina, o fluxo total é

$$\Phi == \mathcal{N}\,\phi == \mu_o \frac{\mathcal{N}^2 r^2}{2R}\,\mathcal{I} = \mathcal{L}_o\,\mathcal{I}$$

- Da expressão anterior obtemos a indutância

$$\mathcal{L}_o == \frac{d\Phi}{d\mathcal{I}} == \mu_o \frac{\mathcal{N}^2 r^2}{2R} \qquad \therefore \qquad \mathcal{L}_o == 4\pi\times 10^{-7}\times\frac{377^2\times 0.2^2}{2\times 1} == 3.57\times 10^{-3}\;(*\,H\,*)$$

- Quando consideramos o núcleo de ferro deve-se substituir μ_o por $\mu = 5000\,\mu_o$, pelo que

$$B_\varphi[R] == \mu \frac{\mathcal{N}\,\mathcal{I}}{2\pi R} == 5000\times 4\pi\times 10^{-7}\times\frac{377\times 5}{2\pi\times 1} \approx 1.85\;(*\,T\,*)$$

$$\mathcal{L}_f == \mu \frac{\mathcal{N}^2 r^2}{2R} == 5000\,\mathcal{L}_o == 17.86\,(*\,H\,*)$$

Problema 9.2

Determine a constante de tempo para um circuito R -L em série constituído por uma resistência de 100 Ω e uma indutância de 10 H. Repetir com uma indutância de 1.0 H.

- Resolver por análise dimensional.
- Resolver pela equação diferencial do circuito.

Solução

- Num circuito deste tipo as constantes a utilizar são a resistência R em Ohm e a indutância $\mathcal{L}$ em Henrys. A análise dimensional destas grandezas requer a sua tradução em termos de unidades SI. Assim, a partir da definição de $\mathcal{L}$, obtemos as relações

$$\Phi == \mathcal{L}\,\mathcal{I} \quad (*\,\text{Weber}\,*) \qquad \therefore \qquad [Wb] == [H][A]$$

$$\varepsilon_{fem} == -\frac{d\Phi}{dt} == -\mathcal{L}\frac{d\mathcal{I}}{dt} \quad (*\,\text{Volt}\,*) \qquad \therefore \qquad [V] == [H][A][s]^{-1}$$

Conclui-se assim que o Henry é dimensionalmente

$$\mathcal{L} == -\frac{\varepsilon_{fem}}{\frac{d\mathcal{I}}{dt}} \quad (* \text{ Henry } *) \qquad \therefore \qquad [H] == [V][A]^{-1}[s]$$

- Quanto à resistência, a partir da lei de Ohm temos

$$R == \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} \quad (* \text{ Ohm } *) \qquad \therefore \qquad [\Omega] == [V][A]^{-1}$$

- Torna-se assim evidente que

$$[\Omega]^{-1}[H] == [A][V]^{-1}[V][A]^{-1}[s] = [s]$$

- A constante de tempo para um circuito R- I deve assim ser, para $\mathcal{L} = 10\,H$

$$\tau == \frac{\mathcal{L}}{R} \qquad \therefore \qquad \tau == \frac{10}{100} == 10^{-1}\,s$$

- e para $\mathcal{L} = 1\,H$

$$\tau == 10^{-2}\,s$$

Solução

- A equação diferencial do circuito obtém-se pela aplicação das leis de Kirchoff para o circuito. Neste caso o único elemento activo é a indutância, e a única queda de potencial Ohmica é a da resistência. Assim, num circuito que inicialmente tinha uma corrente $\mathcal{I}_o$, as equações determinam o comportamento da corrente com o tempo $\mathcal{I}[t]$:

$$\mathcal{V}_R == \varepsilon_{fem} \qquad \therefore \qquad R\,\mathcal{I} = -\mathcal{L}\,\frac{d\mathcal{I}}{dt}$$

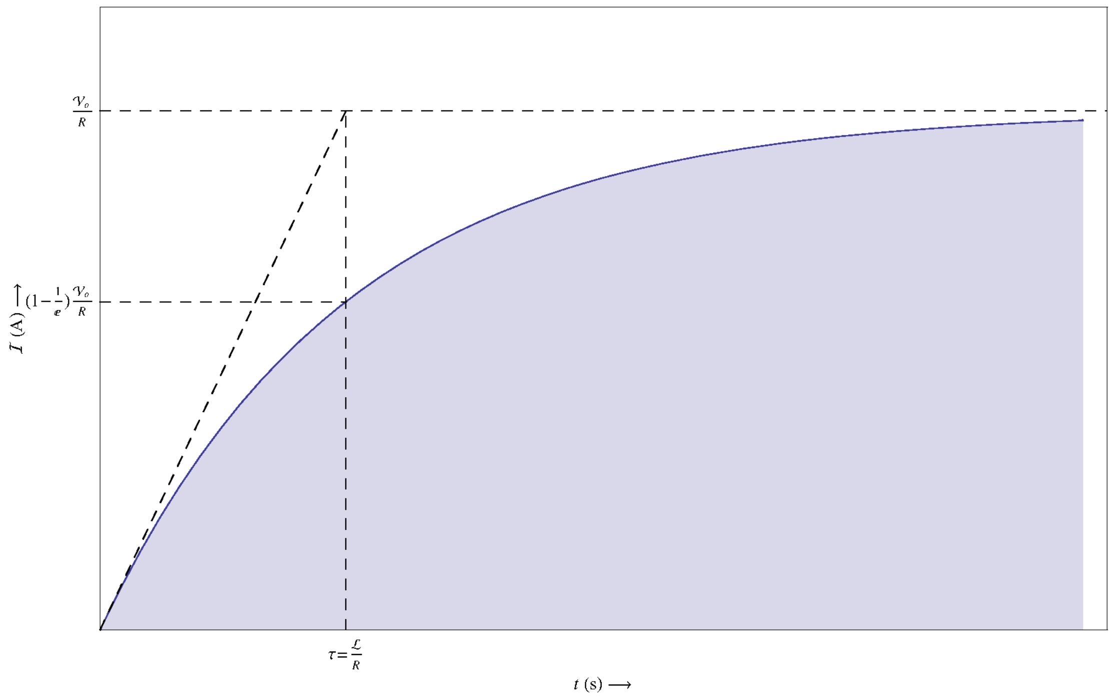
$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} == -\frac{R}{\mathcal{L}}\,\mathcal{I} \qquad \therefore \qquad \mathcal{I} == \mathcal{I}_o\,e^{-\frac{t}{\mathcal{L}/R}}$$

- O tempo característico $\tau = \frac{\mathcal{L}}{R}$ é assim o tempo necessário para dissipar a corrente inicial $\mathcal{I}_o$ para um valor $e^{-1}\,\mathcal{I}_o$.

- Caso o circuito, inicialmente aberto, fosse fechado com uma fonte de potencial constante $\mathcal{V}_o$, a equação do circuito seria

$$\mathcal{I}'[t] + \frac{R}{\mathcal{L}}\,\mathcal{I}[t] == \frac{\mathcal{V}_o}{\mathcal{L}} \qquad \therefore \qquad \mathcal{I}[t] == \frac{\mathcal{V}_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\mathcal{L}/R}}\right)$$

- Neste caso o tempo característico $\tau = \frac{\mathcal{L}}{R}$ é uma medida do transiente de corrente até chegar a um valor próximo ($\sim 63\,\%$) da corrente final $\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}_o}{R}$.


$\frac{\mathcal{V}_o}{R}$
$(1-\frac{1}{e})\frac{\mathcal{V}_o}{R}$
I (A) ⟶
$\tau=\frac{\mathcal{L}}{R}$
t (s) ⟶