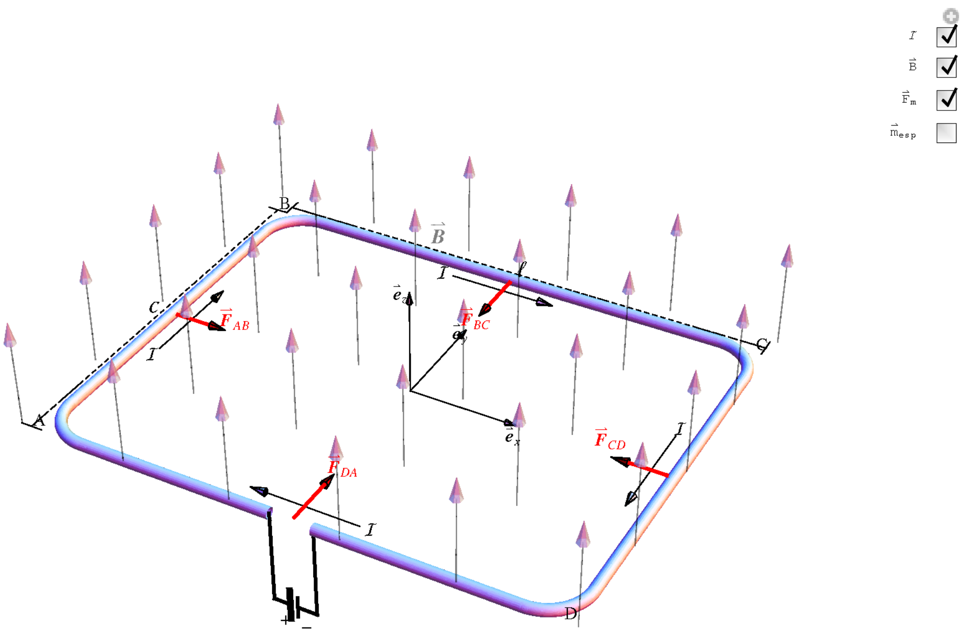
Problema 6.3

Uma espira plana, horizontal, tem uma forma rectangular de 30 cm por 20 cm. A espira é percorrida por uma corrente de 1.0 A e está na presença de um campo magnético vertical de 0.10 T. Determine a força em cada um dos lados da espira. Qual é a força total?



Solução

- **Força de Lorentz sobre cada lado**

Uma carga q que se desloque com velocidade $\vec{v}_q$ num campo eléctrico $\vec{E}[\vec{r}]$ e magnético $\vec{B}[\vec{r}]$ irá sentir uma força total, designada Força de Lorentz, dada por

$$\vec{F}_{em}[\vec{r}_q] == q\,\vec{E}[\vec{r}_q] + q\,\vec{v}_q \times \vec{B}[\vec{r}_q]$$

A componente magnética da força de Lorentz é o termo $\vec{F}_m[\vec{r}_q] = q\,\vec{v}_q \times \vec{B}[\vec{r}_q]$ (onde $\times$ indica o produto externo ou vectorial, ver apêndice.)

- Mostre que um segmento $d\vec{r}_c$ de um condutor Γ em repouso, percorrido por uma corrente I e submetido a um campo magnético $\vec{B}[\vec{r}_c]$ (onde $\vec{r}_c$ indica a posição do segmento condutor) sente uma força $d\vec{F}_m[\vec{r}_c] == \mathcal{I}\, d\vec{r}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c]$

- Considere um segmento $d\vec{r}_c[\vartheta]$ do condutor, assumidamente parametrizado pelas posições $\vec{r}_c[\vartheta]$, onde $\vartheta \in [\vartheta_o, \vartheta_1]$ varia num intervalo conveniente de $\mathbb{R}$. Para simplificar a leitura vamos deixar cair o argumento $[\vartheta]$ de futuro. Se a secção recta do segmento condutor fôr $\Delta\vec{S}$, e representarmos a densidade de cargas de condução q_e no condutor por $\mathcal{N}_c$, a carga dQ_c que no segmento $d\vec{r}_c$ se vai deslocar é

$$dQ_c == \mathcal{N}_c\, q_e\, \Delta\vec{S} \cdot d\vec{r}_c \tag{1}$$

- Quando percorrido por uma corrente $\mathcal{I}$, se representarmos por $\vec{v}_c$ a velocidade de deriva média das cargas de condução dQ_c do semento $d\vec{r}_c$ do condutor, devemos ter $\vec{v}_c$ paralelo a $d\vec{r}_c$. Quando submetido a um campo magnético $\vec{B}$, as cargas de condução em movimento vão sentir a força de Lorentz $d\vec{F}_m$ que irão transmitir ao condutor a que estão ligadas, onde

$$d\vec{F}_m == dQ_c\, \vec{v}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] == \left(\mathcal{N}_c\, q_e\, \Delta\vec{S} \cdot d\vec{r}_c\right) \vec{v}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] \tag{2}$$

- Como $\vec{v}_c$ é sempre paralelo a $d\vec{r}_c$, podemos trocar as suas posições na expressão anterior e obter, tendo em conta que por definição $\mathcal{I} \equiv \mathcal{N}_c\, q_e\, \Delta\vec{S} \cdot \vec{v}_c$ é a carga que consegue passar a secção $\Delta\vec{S}$ num segundo,

$$d\vec{F}_m == dQ_c\, \vec{v}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] == \left(\mathcal{N}_c\, q_e\, \Delta\vec{S} \cdot \vec{v}_c\right) d\vec{r}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] = \mathcal{I}\, d\vec{r}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] \tag{3}$$

- Sendo assim a força total sobre um condutor Γ num campo magnético $\vec{B}$ quando percorrido por uma corrente $\mathcal{I}$ é a soma das forças sobre os elementos de corrente representados por $\mathcal{I}\, d\vec{r}_c$:

$$\vec{F}_m == \int_\Gamma d\vec{F}_m == \mathcal{I} \int_\Gamma d\vec{r}_c \times \vec{B}[\vec{r}_c] == -\mathcal{I} \int_\Gamma \vec{B}[\vec{r}_c] \times d\vec{r}_c$$

- Quando a parametrização $\vartheta \in [\vartheta_o, \vartheta_1] \longrightarrow \vec{r}_c[\vartheta]$ é conhecida podemos explicitar este integral de caminho como

$$\vec{F}_m == \mathcal{I} \int_{\vartheta_o}^{\vartheta_1} \left(\frac{d\vec{r}_c[\vartheta]}{d\vartheta} \times \vec{B}\big[\vec{r}_c[\vartheta]\big] \right) d\vartheta \tag{4}$$

- Quando o campo $\vec{B}[\vec{r}_c]$ não varia ao longo do condutor Γ este integral simplifica-se

$$\vec{F}_m == \mathcal{I} \left(\int_\Gamma d\vec{r}_c \right) \times \vec{B} == \mathcal{I} \left(\vec{r}_f - \vec{r}_i\right) \times \vec{B} \tag{5}$$

onde $\vec{r}_f$ e $\vec{r}_i$ representam as posições inicial e final do condutor.

- No caso presente o campo $\vec{B} = B_z\, \vec{e}_z$ é constante, pelo que o integral em cada lado se reduz a
  - Lado AB

$$\vec{F}_{AB} == \mathcal{I} \int_{AB} d\vec{r}_c \times \vec{B} == \mathcal{I} \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) \times \vec{B} = \mathcal{I} \left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right| B_z\, \vec{e}_y \times \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F}_{AB} == \mathcal{I}\, c\, B_z\, \vec{e}_x == 1.0 \times 0.2 \times 0.1\, \vec{e}_x == 0.02\, \vec{e}_x \quad (* \text{ N } *)}$$

  - Lado BC

$$\vec{F}_{BC} == \mathcal{I} \int_{BC} d\vec{r}_c \times \vec{B} == \mathcal{I} \left(\vec{r}_C - \vec{r}_B\right) \times \vec{B} = \mathcal{I} \left|\vec{r}_C - \vec{r}_B\right| B_z\, \vec{e}_x \times \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F}_{BC} == -\mathcal{I}\, \ell\, B_z\, \vec{e}_y == -1.0 \times 0.3 \times 0.1\, \vec{e}_y == -0.03\, \vec{e}_y \quad (* \text{ N } *)}$$

  - Lado CD

$$\vec{F}_{CD} == \mathcal{I}\int_{CD} d\vec{r}_c \times \vec{B} == \mathcal{I}\left(\vec{r}_D - \vec{r}_C\right)\times\vec{B} = \mathcal{I}\left|\vec{r}_D - \vec{r}_C\right| B_z\left(-\vec{e}_y \times \vec{e}_z\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{CD} == -\mathcal{I}\, c\, B_z\, \vec{e}_x == -1.0\times 0.2\times 0.1\,\vec{e}_x == -0.02\,\vec{e}_x \quad (*\ \mathrm{N}\ *)}$$

- Lado DA

$$\vec{F}_{DA} == \mathcal{I}\int_{DA} d\vec{r}_c \times \vec{B} == \mathcal{I}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_D\right)\times\vec{B} = \mathcal{I}\left|\vec{r}_A - \vec{r}_D\right| B_z\left(-\vec{e}_x \times \vec{e}_z\right)$$

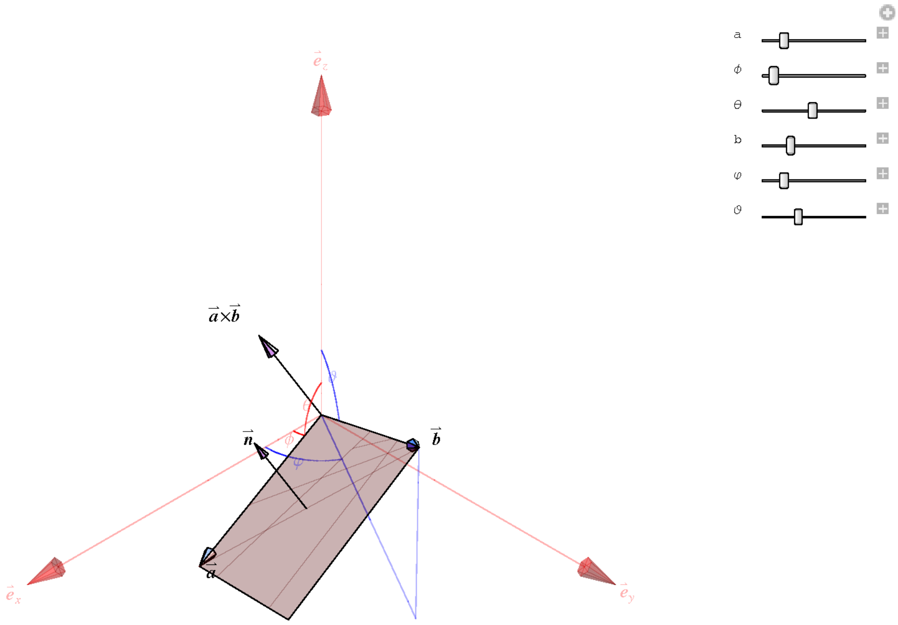
$$\boxed{\vec{F}_{DA} == \mathcal{I}\,\ell\, B_z\, \vec{e}_y == 1.0\times 0.3\times 0.1\,\vec{e}_y == 0.03\,\vec{e}_y \qquad (*\ \mathrm{N}\ *)}$$

Força de Lorentz total sobre a espira

- Quando o campo $\vec{B}[\vec{r}_c]$ é constante ao longo de um **circuito fechado** Γ a força total anula-se porque $\vec{r}_f \equiv \vec{r}_i$.

$$\vec{F}_m == \mathcal{I}\left(\oint_{esp} d\vec{r}_c\right)\times\vec{B} \equiv 0$$

Apêndice: Produto Vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$



Definição

- O paralelogramo determinado por dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em $\mathbb{R}^3$ é o quadrilátero com lados paralelos a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, com comprimentos iguais a $a = |\vec{a}|$ e $b = |\vec{b}|$. Escolhendo qualquer lado como a base, e altura a distância até ao lado paralelo oposto, este paralelogramo tem área $A = a\, b\, Sin[\theta_{ab}]$= (comprimento base)*(altura). O produto **Vectorial** (ou **Externo** ou **Exterior**) destes dois vectores é um vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ com direcção ortogonal a ambos que representa a área orientada $\vec{c} \equiv A\, \vec{n}$ deste paralelogramo ($\vec{n}$ é a normal ao plano do quadrilátero para o lado em que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{n}$ formem um triedro directo-regra da mão direita: $\vec{a}$-polegar, $\vec{b}$-indicador, $\vec{n}$- médio).

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\, b\, \vec{e}_a \times \vec{e}_b \quad ; \quad \vec{e}_a \times \vec{e}_b = Sin[\theta_{ab}]\, \vec{n} \quad \therefore \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\, b\, Sin[\theta_{ab}]\, \vec{n}$$

- Uma forma mnemónica de calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ em $\mathbb{R}^3$ consiste em formar uma matriz simbólica de determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = det\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \left(a_y\, b_z - a_z\, b_y\right) \vec{e}_x + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\, \vec{e}_y + \left(a_x\, b_y - a_y\, b_x\right) \vec{e}_z$$

- Contudo, na maioria dos casos e em geral, para calcular algébricamente produtos de vectores arbitrários $\vec{a} \times \vec{b}$ é mais prático usar as propriedades de linearidade e anti-simetria deste produto conjuntamente com o conhecimento do produto vectorial dos vectores de base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ dois a dois:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad ; \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0 \quad ; \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = 0 \quad ; \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

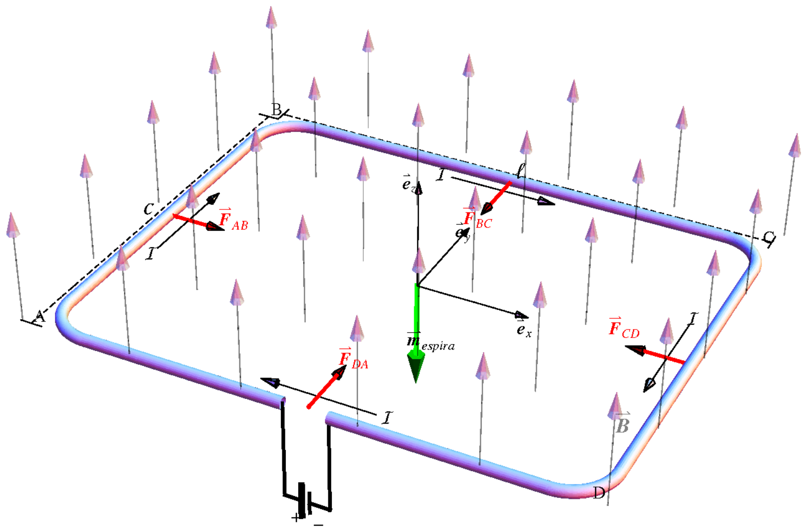
- Propriedades:

$$\begin{array}{ll} Linearidade: & \vec{a} \times \left(\lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c}\right) = \lambda\, \vec{a} \times \vec{b} + \mu\, \vec{a} \times \vec{c} \\ Anti-Simetria: & \vec{a} \times \vec{b} = -\, \vec{b} \times \vec{a} \\ Desassociatividade: & \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \end{array}$$

Problema 6.4

Calcular o momento de força de Laplace-Lorentz na espira do probema anterior.

Solução



- O Momento Magnético $\vec{m}_{espira}$ que a espira apresenta quando percorrida pela corrente I no sentido apresentado na figura é (usando a regra da mão direita fechar no sentido da corrente quando o polegar aponta na direcção de $\vec{m}_{espira}$, neste caso $-\vec{e}_z$)

$$\vec{m}_{espira} == -I\,S\,\vec{e}_z \qquad \therefore \qquad \vec{m}_{espira} == -1.0\times 0.3\times 0.2\,\vec{e}_z = -0.06\,\vec{e}_z \quad (*\ A\ m^2 *)$$

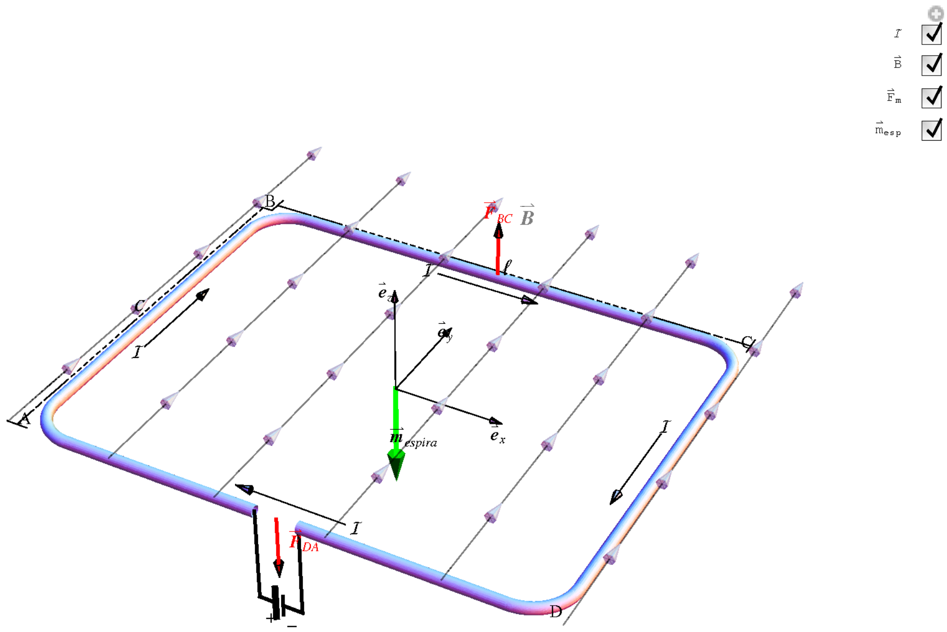
- O binário (momento de força) exercido pelo campo magnético $\vec{B} = B_z\,\vec{e}_z$ sobre $\vec{m}_{espira} = -I\,S\,\vec{e}_z$ é assim nulo neste caso (porque $\vec{e}_z\times\vec{e}_z = 0$)

$$\vec{N} == \vec{m}_{espira}\times\vec{B} \qquad \therefore \qquad \vec{N} == -I\,S\,B_z\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z \equiv 0$$

Problema 6.5

Repetir os dois problemas anteriores para o caso em que o campo magnético é horizontal, paralelo ao lado com 20 cm.

Solução



Força de Lorentz sobre cada lado

- No caso em que $\vec{B} = B_y\,\vec{e}_y$ as formulas anteriores dão
    - Lado AB

$$\vec{F}_{AB} == I\int_{AB} d\vec{r}_c\times\vec{B} == I\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)\times\vec{B} = I\left|\vec{r}_A-\vec{r}_B\right| B_y\,\vec{e}_y\times\vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{F}_{AB} == 0 \quad (*\ N\ *)}$$

- Lado BC

$$\vec{F}_{BC} == I\int_{BC} d\vec{r}_c\times\vec{B} == I\left(\vec{r}_C-\vec{r}_B\right)\times\vec{B} = I\left|\vec{r}_C-\vec{r}_B\right| B_y\,\vec{e}_x\times\vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{F}_{BC} == I\,\ell\,B_y\,\vec{e}_z == 0.03\,\vec{e}_z \quad (*\ N\ *)}$$

- Lado CD

$$\vec{F}_{CD} == I\int_{CD} d\vec{r}_c\times\vec{B} == I\left(\vec{r}_D-\vec{r}_C\right)\times\vec{B} = -I\left|\vec{r}_D-\vec{r}_C\right| B_y\left(-\vec{e}_y\times\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{CD} == 0 \quad (*\ N\ *)}$$

- Lado DA

$$\vec{F}_{DA} == \mathcal{I} \int_{DA} d\vec{r}_c \times \vec{B} == \mathcal{I} \left(\vec{r}_A - \vec{r}_D\right) \times \vec{B} = \mathcal{I} \left|\vec{r}_A - \vec{r}_D\right| B_y \left(-\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{DA} == -\mathcal{I}\, \ell\, B_z\, \vec{e}_z == -\, 0.03\, \vec{e}_z \qquad (* \; N \; *)}$$

- **Momento de Força sobre a espira**

  - O momento magnético da espira continua a ser $\vec{m}_{espira} = -\mathcal{I}\,\mathcal{S}\,\vec{e}_z$ como anteriormente, mas agora o campo $\vec{B} == B_y\, \vec{e}_y$ tem uma orientação diferente.

$$\vec{N} == \vec{m}_{espira} \times \vec{B} == \left(-\mathcal{I}\,\mathcal{S}\,\vec{e}_z\right) \times \left(B_y\, \vec{e}_y\right)$$

  - O produto externo $\vec{e}_z \times \vec{e}_y == -\vec{e}_x$ pelo que

$$\vec{N} == -\mathcal{I}\,\mathcal{S}\,B_y\,\vec{e}_z \times \vec{e}_y \equiv \mathcal{I}\,\mathcal{S}\,B_y\,\vec{e}_x == 1.0 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.1\, \vec{e}_x = 0.006\, \vec{e}_x \quad (* \; N\, m \; *)$$

Problema 7.2

Calcular, recorrendo à lei de Ampère, o campo $\vec{B}$ criado por um cabo rectilíneo de comprimento infinito e raio R, percorrido pela corrente I distribuída uniformemente na sua secção, para:

- $r > R$
- $r < R$

Solução

a) Caso em que *r* > *R*

- De acordo com a lei de Ampère a circulação do campo magnético $\vec{B}[\vec{r}]$ ao longo de um caminho fechado qualquer Γ é proporcional à soma algébrica das correntes que atravessam qualquer superfíce $\mathcal{S}$ cujo bordo seja o caminho Γ, ou seja $\partial\mathcal{S} \equiv \Gamma$. Simbólicamente, se $\vec{r}_\Gamma$ designar a posição dos pontos do circuito Γ,

$$\oint_\Gamma \vec{B}[\vec{r}_\Gamma] \cdot d\vec{r}_\Gamma == \mu_o\, \mathcal{I}_{int}$$

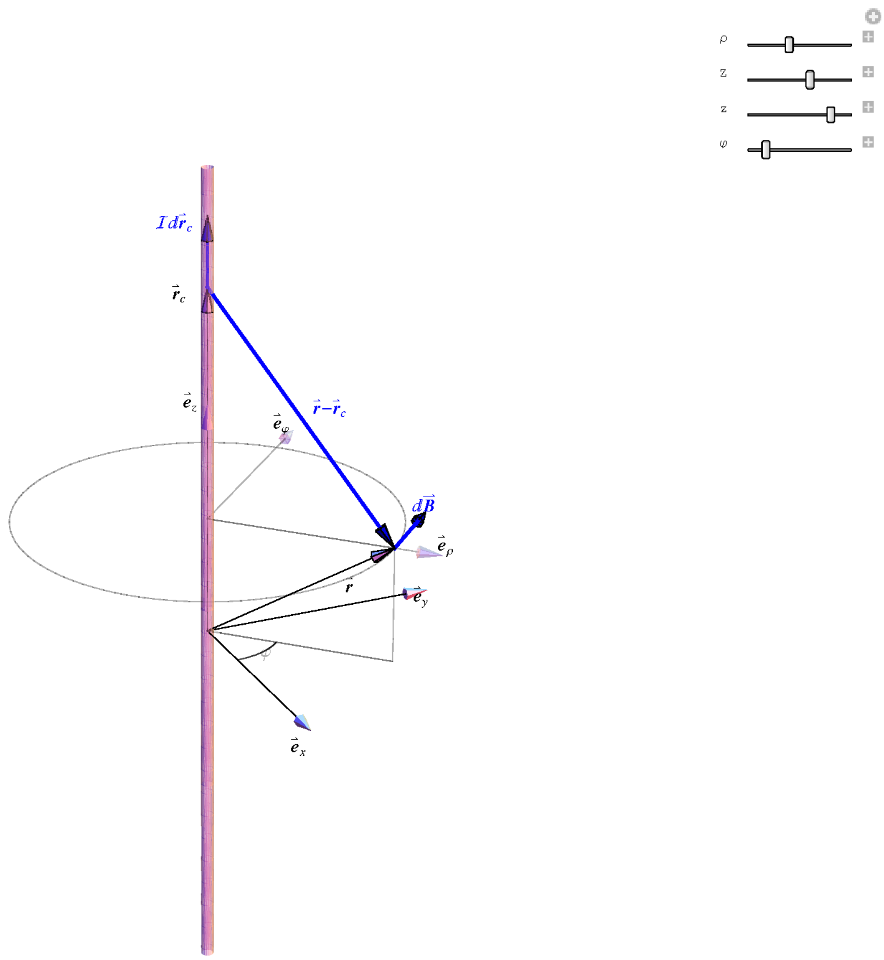
- A constante de proporcionalidade é a permeabilidade magnética do vácuo

$$\mu_o = 4\,\pi \times 10^{-7} \quad (* \; \frac{N}{A^2} = \frac{H}{m} *)$$

- Pela lei de Biot-Savart, um segmento de corrente $\mathcal{I}\, d\vec{r}_c$ na posição $\vec{r}_c$ contribui para o campo no ponto $\vec{r}$ através da formula

$$d\vec{B}\left[\vec{r}\,;\, \mathcal{I}\, d\vec{r}_c,\, \vec{r}_c\right] == \frac{\mu_o}{4\,\pi}\, \frac{\mathcal{I}\, d\vec{r}_c \times \left(\vec{r} - \vec{r}_c\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_c\right|^3}$$

Se $d\vec{r}_c = dz\,\vec{e}_z$ então o produto externo deve ser perpendicular ao plano vertical passando pelo condutor e o ponto $\vec{r}$. Se usarmos coordenadas cilíndricas com eixo $\vec{e}_z$ alinhado com o condutor, isto equivale a afirmar o seguinte:



$\vec{r}_c = z_c\,\vec{e}_z$ *posição no condutor à cota z* ;

$I\,d\vec{r}_c = I\,dz_c\,\vec{e}_z$ *elemento de corrente de comprimento dz* ;

$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho[\varphi] + z\,\vec{e}_z$ *posição geral em coordenadas cilíndricas* ;

$$d\vec{B}\left[\vec{r};\,I\,d\vec{r}_c,\,\vec{r}_c\right] == \frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{I\,dz_c\,\vec{e}_z\times\left(\rho\,\vec{e}_\rho[\varphi] + (z-z_c)\,\vec{e}_z\right)}{\left(\rho^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}} == \frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{I\,\rho\,dz_c}{\left(\rho^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho[\varphi]$$

$$d\vec{B}\left[\vec{r};\,I\,d\vec{r}_c,\,\vec{r}_c\right] == \frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{I\,\rho\,dz_c}{\left(\rho^2 + (z-z_c)^2\right)^{3/2}}\,\vec{e}_\varphi[\varphi]$$

- O campo total $\vec{B}[\vec{r}]$ é a soma de contribuições $d\vec{B}[\vec{r}\,;\,I\,d\vec{r}_c,\,\vec{r}_c]$, todas apenas tendo componente segundo $\vec{e}_\varphi[\varphi]$, donde se conclui que

$$\vec{B}[\vec{r}] == \frac{\mu_o}{4\pi}\, I\,\rho\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\rho^2+(z-z_c)^2\right)^{3/2}}\,dz_c\right)\vec{e}_\varphi[\varphi] == B_\varphi[\rho]\,\vec{e}_\varphi[\varphi]$$

- Concluímos assim que $\vec{B}$ apenas possui componente $B_\varphi[\rho]$ diferente de zero. A circulação deste campo numa circunferência horizontal Γ de raio r centrada no condutor, no sentido do fecho dos dedos da mão direita quando o polegar aponta na direcção de I, deve ser

$$\vec{r}_\Gamma == r\,\vec{e}_\rho[\varphi] \qquad \varphi\in[0,\,2\pi] \qquad ; \qquad d\vec{r}_\Gamma = r\,\frac{d\vec{e}_\rho[\varphi]}{d\varphi}\,d\varphi == r\,\vec{e}_\varphi[\varphi]\,d\varphi$$

$$\oint_\Gamma \vec{B}[\vec{r}_\Gamma]\cdot d\vec{r}_\Gamma == \mu_o\, I \qquad \therefore \qquad \int_0^{2\pi} B_\varphi[r]\,r\,d\varphi == 2\pi\,r\,B_\varphi[r] == \mu_o\,I$$

- Daqui se conclui que, em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B}[\vec{r}] == \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{I}{\rho}\,\vec{e}_\varphi[\varphi]$$

b) Caso em que $r < R$

- Quando se pretende calcular o campo dentro do condutor podemos usar os mesmos argumentos que anteriormente para calcular a circulação do campo $\vec{B}$ ao longo de uma circunferência horizontal Γ de raio $r < R$, centrada no condutor. Contudo agora apenas parte da corrente I passa dentro desta circunferência. Assumindo uma densidade uniforme de corrente $\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2}\,\vec{e}_z$, temos que

$$I_r == \vec{J}\cdot\Delta\vec{S}_r == \frac{I}{\pi R^2}\,\pi\,r^2 \qquad \therefore \qquad I_r == \left(\frac{r}{R}\right)^2 I$$

- A aplicação da lei de Ampère agora dá

$$\oint_\Gamma \vec{B}[\vec{r}_\Gamma]\cdot d\vec{r}_\Gamma == \mu_o\, I_r \qquad \therefore \qquad \int_0^{2\pi} B_\varphi[r]\,r\,d\varphi == 2\pi\,r\,B_\varphi[r] == \mu_o\left(\frac{r}{R}\right)^2 I$$

- Daqui se conclui que, em coordenadas cilíndricas dentro do condutor

$$\vec{B}[\vec{r}] == \frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\frac{I}{\rho}\,\vec{e}_\varphi[\varphi] == \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{1}{R^2}\,I\,\rho\,\vec{e}_\varphi[\varphi]$$