Aulas Práticas

Electromagnetismo e Optica (LEIC)
1ºSem. 2007/2008

http://fisica.ist.utl.pt/~leic_f2

Prof. Amaro Rica da Silva
http://centra.ist.utl.pt/~amaro

***Segunda*, 5 *Novembro*, 2007**
20:59:30

Definições iniciais

Problema 7.1

A catenária de um eléctrico está suspensa a uma altura de 10 m acima do pavimento. Num troço rectilínio Este-Oeste o fio é percorrido por uma corrente de 100 A na direcção Oeste. Descreva o campo magnético gerado pela corrente e determine o seu valor junto ao pavimento, debaixo do fio. Compare esse valor com o do campo magnético terrestre.

- Orientando a direcção Oeste com $\vec{e}_z$ e a vertical para baixo com $\vec{e}_x$, ficamos com $\vec{e}_y$ a apontar para o Sul. Esta é também a direcção do campo magnético junto ao chão quando a corrente percorre a catenária na direcção Oeste.

- Usando a Lei de Ampère e aproximando a catenária a um condutor rectilínio infinito, podemos calcular a magnitude do campo $\vec{B}$ no perímetro de um cilindro de raio r centrado no condutor

$$B_\varphi[r] = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\mathcal{I}}{r}$$

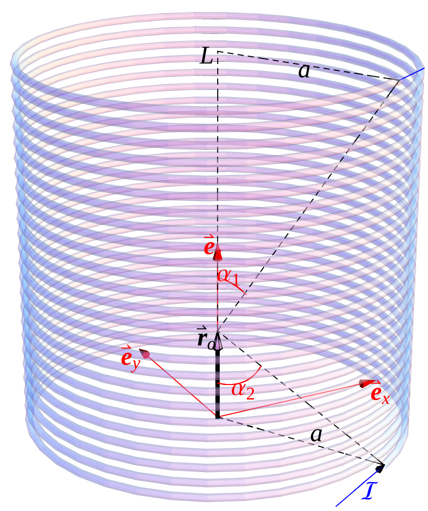
- Junto ao chão este campo tem uma magnitude

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\mathcal{I}}{r} = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{2\pi}\frac{100}{10} == 2\times 10^{-6}\,(*\ T\ *)$$

- O campo magnético da Terra é de cerca de $B_g = 0.5\,(*\text{ Gauss }*) == 50\times 10^{-6}\,(*\text{ Tesla }*)$, portanto ainda muito maior que o gerado pela catenária.

Problema 7.3

Um solenóide tem 20 cm de comprimento, 2 cm de diâmetro, e o fio condutor está enrolado em várias camadas de modo a ter um numero total de 4000 espiras. O fio é percorrido por uma corrente de 30 A. Qual é o valor aproximado do campo magnético no centro e nas extremidades do solenóide? (Para ter uma corrente tão alta sem derreter o fio por efeito Joule, esta situação refere−se a um fio supercondutor refrigerado a baixa temperatura.)



Campo de uma espira no seu eixo

- O campo magnético num ponto P do eixo $\vec{\mathbf{e}}_z$ de uma espira circular de raio a, à distância z_o do plano da espira é, de acordo com a lei de Biot-Savart, e parametrizando a espira em coordenadas cilíndricas $\{\rho, \varphi, z\}$

$$\vec{\mathbf{e}}_\rho[\varphi] == Cos[\varphi]\,\vec{\mathbf{e}}_x + Sin[\varphi]\,\vec{\mathbf{e}}_y \quad ; \quad \vec{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi] == -Sin[\varphi]\,\vec{\mathbf{e}}_x + Cos[\varphi]\,\vec{\mathbf{e}}_y$$

$$\vec{\mathbf{r}}_c == a\,\vec{\mathbf{e}}_\rho[\varphi] \quad ; \quad \vec{\mathbf{r}}_P == z_o\,\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$d\vec{\mathbf{r}}_c == a\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi]$$

Calcule o produto vectorial $d\vec{\mathbf{r}}_c \times (\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_c)$

$$d\vec{\mathbf{r}}_c \times (z_o\,\vec{\mathbf{e}}_z) == z_o\,a\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi] \times \vec{\mathbf{e}}_z == z_o\,a\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_\rho[\varphi]$$

$$d\vec{\mathbf{r}}_c \times (-\vec{\mathbf{r}}_c) == -a^2\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi] \times \vec{\mathbf{e}}_\rho[\varphi] = a^2\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_z$$

- Lei de Biot-Savart:

Mostre que no integral que se segue o termo em $\vec{\mathbf{e}}_\varphi[\varphi]$ é nulo após a integração em φ.

$$\vec{\mathbf{B}}_P == \frac{\mu_o}{4\pi}\,\mathcal{I} \oint_{espira} \frac{d\vec{\mathbf{r}}_c \times (\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_c)}{\left|\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_c\right|^3} == \frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{\mathcal{I}}{(z_o^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left(z_P\,a\,\vec{\mathbf{e}}_\rho[\varphi] + a^2\,\vec{\mathbf{e}}_z\right) d\varphi == \frac{\mu_o}{2}\,\frac{\mathcal{I}\,a^2}{(z_o^2 + a^2)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e}}_z$$

Campo de N espiras iguais com o mesmo eixo

- O campo magnético em P de $N = 4000$ espiras distribuídas de $z = 0$ a $z = L = 0.2\,m$ pode ser visto como a soma de campos de espiras individuais coaxiais à cota z, com distâncias de $z - z_o$ ao ponto P no eixo $\vec{\mathbf{e}}_z$. Para uma densidade de espiras $\frac{N}{L}$ em z, obtemos

$$\vec{\mathbf{B}}[\vec{\mathbf{r}}_P] == \int_0^L \frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{a^2}{\left((z - z_o)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{N}{L}\,dz\,\vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \textit{mude para variável } \frac{z - z_o}{a} \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L} \int_{-\frac{z_o}{a}}^{\frac{L - z_o}{a}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z - z_o}{a}\right)^2\right)^{3/2}}\,d\left(\frac{z - z_o}{a}\right)\vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \textit{mude para variável } Tan[\theta] = \frac{z - z_o}{a} \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L} \int_{-\frac{z_o}{a}}^{\frac{L - z_o}{a}} \frac{1}{\left(1 + Tan[\theta]^2\right)^{3/2}}\,d\,Tan[\theta]\,\vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \textit{lembre-se que } 1 + Tan[\theta]^2 = \frac{1}{Cos[\theta]^2} \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L} \int_{-\frac{z_o}{a}}^{\frac{L - z_o}{a}} Cos[\theta]^3\,d\,Tan[\theta]\,\vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \textit{mude para variável } \theta = Tan\left[\frac{z - z_o}{a}\right] \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L} \int_{ArcTan\left[-\frac{z_o}{a}\right]}^{ArcTan\left[\frac{L - z_o}{a}\right]} Cos[\theta]^3\,\partial_\theta Tan[\theta]\,d\theta\,\vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \textit{use} \quad \partial_\theta Tan[\theta] = \frac{1}{Cos[\theta]^2} \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L}\int_{ArcTan\left[-\frac{z_o}{a}\right]}^{ArcTan\left[\frac{L-z_o}{a}\right]} Cos[\theta]\,d\theta\,\vec{e}_z \quad ; \quad \textit{a primitiva de } Cos[\theta] \textit{ é } Sin[\theta] \quad ;$$

$$\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{2}\,\frac{N}{L}\left(Sin\left[ArcTan\left[\frac{L-z_o}{a}\right]\right] - Sin\left[ArcTan\left[-\frac{z_o}{a}\right]\right]\right)\vec{e}_z \quad ; \quad \textit{use } Sin[\theta] = \frac{Tan[\theta]}{\sqrt{1+Tan[\theta]^2}} \quad ;$$

$$\vec{B}[\vec{r}_P] == \frac{\mu_o\,\mathcal{I}\,N}{2\,L}\left(\frac{L-z_o}{\sqrt{a^2+(L-z_o)^2}} + \frac{z_o}{\sqrt{a^2+z_o^2}}\right)\vec{e}_z \equiv \frac{\mu_o\,\mathcal{I}\,N}{2\,L}\left(Cos[\alpha_1]+Cos[\alpha_2]\right)\vec{e}_z$$

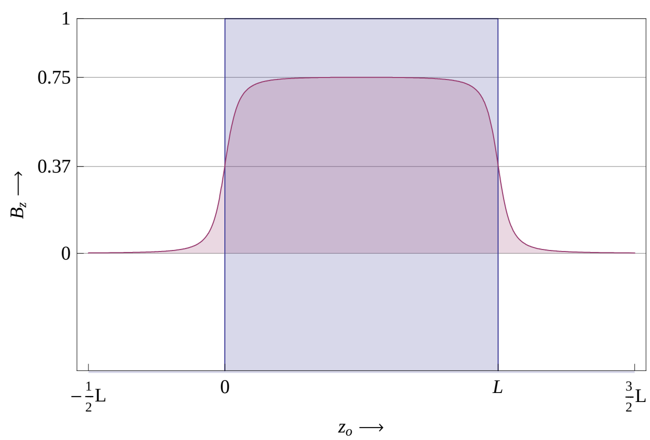
- No centro do fio $z_o = \frac{L}{2}$ pelo que $Cos[\alpha_1] = Cos[\alpha_2] = \frac{L/2}{\sqrt{a^2+(L/2)^2}}$

$$\vec{B}[\vec{r}_P] == \frac{4\,\pi\times10^{-7}\times30\times4000}{2\times0.2}\left(2\times\frac{0.1}{\sqrt{0.01^2+0.1^2}}\right)\vec{e}_z == 0.75\,\vec{e}_z\ (*\ \mathrm{T}\ *)$$

- Em cada extremidade $z_o = 0$ ou $z_o = L$ pelo que

$$\vec{B}[\vec{r}_P] == \frac{4\,\pi\times10^{-7}\times30\times4000}{2\times0.2}\left(\frac{0.2}{\sqrt{0.01^2+0.2^2}}\right)\vec{e}_z == 0.376\,\vec{e}_z\ (*\ \mathrm{T}\ *)$$

Variação do campo magnético no eixo da bobina



Problema 7.5

Uma bobina fina com 200 espiras tem uma área de 100 cm^2. A bobina está numa região onde o campo magnético é perpendicular ao plano da bobina e tem um módulo de 0.50 T. Se a fonte do campo é desligada (ou afastada) de modo a que o campo seja reduzido a zero em 200 ms, qual é o valor médio da "força" electromotriz induzida? Se a bobina tiver uma resistência de 25 Ω e os seus extremos forem curto-circuitados, qual é a corrente média induzida?

- Dados

$$valores = \begin{cases} n \to 200 & espiras \\ S \to 100 \times 10^{-4} & m^2 \\ B_o \to 0.5 & T \\ \Delta t \to 200 \times 10^{-3} & s \end{cases} \qquad // \sharp[[1]]^T[[1]] \;\&;$$

- Se o campo $\vec{B}[t] = B_z[t]\,\vec{e}_z$ se reduz a zero uniformemente em Δt segundos, então

$$B_z[t] == B_o \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

- O fluxo na bobina varia no tempo de acordo com

$$\Phi[t] == \iint_S \vec{B}[t] \cdot d\vec{S} == n\,S\,B_z[t] == n\,S\,B_o \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

- A força electromotriz instantânea é

$$\varepsilon_{fem}[t] == -\frac{d\Phi[t]}{dt} == n\,S\,B_o\,\frac{1}{\Delta t}$$

- O seu valor médio é

$$\langle \varepsilon_{fem} \rangle == \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \varepsilon_{fem}[t]\,dt == n\,S\,B_o\,\frac{1}{\Delta t}$$

$$\langle \varepsilon_{fem} \rangle == 200 \times 100 \times 10^{-4} \times 0.5 \times \frac{1}{200 \times 10^{-3}} == 5. \qquad (*\ V *)$$

Problema 8.3

Uma bobina com 10 espiras e uma área de $0.12\,m^2$ roda a uma frequência de $60\,Hz$ num local onde há um campo magnético de $0.40\,T$. O eixo de rotação está no plano da bobina e é perpendicuIar ao campo magnético. Qual a força electromotriz máxima induzida na bobina? Que tipo de corrente produzida, alterna ou contínua?

- Pela Lei de Faraday

$$\varepsilon_{fem} == -\frac{d\Phi}{dt}$$

- O fluxo magnético $\Phi[t]$ através da superfície orientada $\vec{S}[t] = S\,\vec{n}[t]$ de área $S = 0.12\,m^2$ com bordo numa espira é

$$\phi[t] == \iint_S \vec{B}[\vec{r}_S] \cdot d\vec{S}[t] == \iint_S \vec{B}[\vec{r}_S] \cdot \vec{n}[t]\,dS$$

- Para uma espira cujo eixo é perpendicular a $\vec{B}[\vec{r}_S] == B_z\,\vec{e}_z = 0.4\,\vec{e}_z$ (* T *), deve-se ter

$$\vec{B}[\vec{r}_S] \cdot \vec{n}[t] == B_z\,\vec{e}_z \cdot \vec{n}[t] == B_z\,Cos[\omega\,t + \alpha_o]$$

Podemos então fazer o cálculo para uma espira

$$-\frac{d\phi}{dt} == -\iint_S \frac{\partial}{\partial t}(B_z\, Cos[\omega\, t + \alpha_o])\, dS == B_z\, \omega\, Sin[\omega\, t + \alpha_o] \iint_S dS == S\, B_z\, \omega\; Sin[\omega\, t\; + \alpha_o]$$

- O fluxo que atravessa $n = 10$ espiras é $\Phi = n\,\phi$ pelo que, relembrando que $\omega = 2\,\pi\; f\; = 2\,\pi\,\times\,60\,(*\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,*)$

$$\varepsilon_{fem} == n\,S\,B_z\,\omega\;\; Sin[\omega\, t\; + \alpha_o]$$

$$\varepsilon_{fem} == 10\times 0.12\times 0.4\times 2\,\pi\times 60\, Sin[2\,\pi\times 60\,\times\, t\; + \alpha_o]$$

- Esta força electromotriz é máxima quando $\omega\, t + \alpha_o\, = (4\, m + 1)\, \frac{\pi}{2}$

$$\left(\varepsilon_{fem}\right)_{max} == 10\times 0.12\times 0.4\times 2\,\pi\times 60 == 180.955\;\; (*\; \text{V}\; *)$$

- A corrente produzida é alterna. Se Z designar a impedância de um circuito ligado à bobina deve-se ter

$$\mathcal{I}[t] = \frac{1}{Z}\,\varepsilon_{fem} == \frac{1}{Z}\,S\,B_z\,\omega\;\; Sin[\omega\, t\; + \alpha_o]$$