Problema 8.2

Uma barra pesada com 1 m de comprido é mantida horizontalmente numa direcção Este-Oeste num local onde o campo magnético terrestre tem uma componente horizontal de $2.0\times 10^{-5}\ T$ apontando para o Norte. A barra é largada. Qual a força electromotriz induzida 4 segundos depois de a barra ter sido largada?

Solução

- Imaginemos um qualquer circuito fechado de que a barra faça parte em qualquer instante. Assuma que a barra é a única parte móvel do circuito. A área circunscrita por este circuito tem uma parte constante A_o e uma parte variável $A_b[t] = \ell \times z[t]$ que é a área varrida pela barra de comprimento ℓ quando cai uma distância $z[t]$ no tempo t. Uma vez que sabemos a expressão da aceleração da barra

$$a_z = g = 9.8 \qquad (* \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \ *)$$

sabemos igualmente que $\frac{dv_z}{dt} = a_z$ donde, supondo $v_o = 0$,

$$v_z[t] = g\, t$$

e de $\frac{dz}{dt} = v_z[t]$ deduzimos, supondo também que $z_o = 0$,

$$z[t] = \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

- Colocando $\vec{e}_x$ na direcção e sentido E- W, $\vec{e}_y$ apontando para o N, ficamos com $\vec{e}_z$ a apontar para o chão. A área varrida pela barra é (escolhendo a normal no sentido $\vec{e}_y$)

$$\vec{A}_b[t] = \frac{1}{2}\, g\, t^2\, \ell\, \vec{e}_y \quad (* \ m^2 *)$$

- O campo magnético terrestre é localmente $\vec{B}_♁ = B_y\, \vec{e}_y$ e o fluxo no circuito completo incluindo a barra em cada instante é

$$\Phi[t] = \vec{B}_♁ \cdot \vec{A}_b[t] + \int\int_{A_o} \vec{B}_♁ \cdot d\vec{S} \qquad (* \ H *)$$

- Como o segundo termo é constante no tempo, ao derivarmos o fluxo em ordem ao tempo obtemos apenas a derivada do primeiro:

$$\epsilon_{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\vec{B}_♁ \cdot \frac{d\vec{A}_b[t]}{dt} = -B_y\, g\, t\, \ell < 0$$

- Como é negativa, esta força electromotriz induz uma corrente na barra que é dirigida de W- E, de acordo com a regra da mão direita em que o polegar aponta na direcção da normal $\vec{e}_y$ à área $\vec{A}_b[t]$ e os dedos fecham no sentido positivo da corrente induzida.

- Ao fim de 4 s a força electromotriz é

$$\epsilon_{fem}[4\,s] = -2.0 \times 10^{-5} \times 9.8 \times 4 \times 1 = -0.000784 \quad (* \; V \; *)$$

Problema 8.4

Um solenóide com 3.0 cm de comprimento e uma secção de 0.50 cm^2, tem 300 espiras e vai ser usado para detectar ondas de rádio.

a) - Qual é a sua indutância (assumindo que é muito longo)?

b) - Qual é a sua indutância quando no seu interior está ferrite com uma permeabilidade relativa $\mu_r = 400$?

Solução a)

- Para um solenóide comprido podemos usar a Lei de Ampère para calcular o campo no seu interior. Utilizando um circuito Γ rectangular com um lado dentro do solenóide, paralelo ao seu eixo. Se o circuito for atravessado $\mathcal{N}_\Gamma$ vezes pela corrente $\mathcal{I}$ e tiver largura ℓ obtemos (designando a densidade de espiras por $n = \frac{\mathcal{N}_\Gamma}{\ell}$)

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}}[\vec{\boldsymbol{r}}_\Gamma] \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}_\Gamma = \mu_o\, \mathcal{I}\, \mathcal{N}_\Gamma = B_z\, \ell \qquad \therefore \qquad B_z = \mu_o\, \frac{\mathcal{N}_\Gamma}{\ell}\, \mathcal{I} = \mu_o\, n\, \mathcal{I}$$

- O fluxo através das N espiras do solenóide de comprimento L deve ser calculado tendo em conta que:

  a) - A densidade de espiras é constante : $n = \frac{\mathcal{N}_\Gamma}{\ell} = \frac{N}{L}$

  b) - Cada linha de campo atravessa N vezes a área S_{tot} delimitada pelo condutor, a qual pode ser aproximada por $S_{tot} = N\, S$, com S a área duma secção recta do solenóide.

  c) - O campo $\vec{\boldsymbol{B}} = B_z\, \vec{\boldsymbol{e}}_z$ é constante dentro do solenóide.

$$\Phi == \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}}_{tot} == B_z\, N\, S == \mu_o\, n\, N\, S\, \mathcal{I} \qquad \therefore \qquad \mathcal{L} == \mu_o\, \frac{N^2}{L}\, S == 4\,\pi \times 10^{-7} \times \frac{300^2}{3 \times 10^{-2}} \times 5 \times 10^{-5} == 1.88 \times 10^{-4} \; (* \text{ H } *)$$

Solução b)

- Com um núcleo de ferrite com permeabilidade $\mu \equiv \mu_r\, \mu_o = 400 \times \mu_o$ o campo magnético deduzido através da Lei de Ampère é

$$B_z = \mu\, n\, \mathcal{I} \qquad \therefore \qquad \mathcal{L}_f = \mu_r\, \mu_o\, \frac{N^2}{L}\, S = 400 \times \mathcal{L}$$

Problema 9.3

Determine a constante de tempo para um circuito R - C em série.

a) Resolver por análise dimensional.

b) Resolver usando a equação diferencial do circuito.

Solução a)

- Um circuito R- C é constituído por uma resistência $R\,(\Omega)$ e um condensador $C\,(F)$. Em termos de dimensão as unidades Ohm (Ω) e Farad (F) podem-se escrever como
  - Lei de Ohm $R = \frac{V}{I}$

$$Ohm \equiv \frac{Volt}{Ampere}$$

  - Definição de capacidade $C = \frac{Q}{V}$

$$Farad = \frac{Coulomb}{Volt} = \frac{Ampere \times segundo}{Volt}$$

- Assim, a única constante que se pode construir com R e C tendo dimensões de tempo é

$$\tau = R\,C \quad (* \ \frac{Volt}{Ampere} \times \frac{Ampere \times segundo}{Volt} = segundo \ *)$$

Solução b)

- Num circuito fechado consistindo de um condensador carregado C e uma resistência R sem mais elementos activos, qualquer que seja a corrente $I[t]$ a percorrer o circuito deve-se ter para as quedas de potencial $\mathcal{V}$ em cada elemento:

$$\mathcal{V}_R + \mathcal{V}_c = R\,I[t] + \frac{1}{C}\,Q[t] = 0$$

onde $Q[t]$ representa a carga na armadura positiva do condensador no instante t.

- Dado que qualquer corrente no circuito contribui para a variação de carga desta armadura, deve-se ter também

$$\mathcal{I}[t] == \frac{dQ[t]}{dt}$$

- Obtemos assim por substituição na primeira equação

$$R\,\frac{dQ[t]}{dt} == -\frac{1}{C}\,Q[t] \qquad \therefore \qquad \frac{dQ[t]}{dt} == -\frac{1}{RC}\,Q[t]$$

- Esta equação tem uma solução simples

$$Q[t] == Q_o\,e^{-\frac{(t-t_o)}{RC}}$$

como se pode ver fazendo

$$\frac{dQ[t]}{dt} == -\frac{1}{RC} Q[t]$$; *dividir ambos os lados por* $Q[t]$;

$$\frac{1}{Q[t]} \frac{dQ[t]}{dt} == -\frac{1}{RC}$$; *o lado esquerdo é uma derivada total* ;

$$\frac{dLog[Q[t]]}{dt} == -\frac{1}{RC}$$; *a derivada de* $Log[Q[t]]$ *em t é constante* ;

$$Log[Q[t]] - Log[Q_o] == -\frac{(t - t_o)}{RC}$$; *a diferença de logaritmos é o logaritmo do quociente* ;

$$Log\left[\frac{Q[t]}{Q_o}\right] == -\frac{(t - t_o)}{RC}$$; *a inversa do logaritmo é a exponencial* ;

$$\frac{Q[t]}{Q_o} == e^{-\frac{(t-t_o)}{RC}}$$

- A exponencial decai para $\frac{1}{e} \approx 0.367879$ num tempo $\tau = t - t_o = RC$. Este é o tempo característico para a descarga do condensador. A corrente no circuito também decai no tempo de acordo com

$$I[t] = -\frac{Q_o}{RC} e^{-\frac{(t-t_o)}{RC}} = I_o e^{-\frac{(t-t_o)}{RC}} \quad \therefore \quad I_o == -\frac{Q_o}{RC}$$