Problema 10.5

O perfil de uma onda harmónica progressiva que se desloca a uma velocidade de $1.2\, m/s$ é, num dado instante da forma $y = (0.02\, m)\, sin\left(157\, m^{-1}\, x\right)$. Qual é a sua ampIitude, comprimento de onda, frequência, e período?

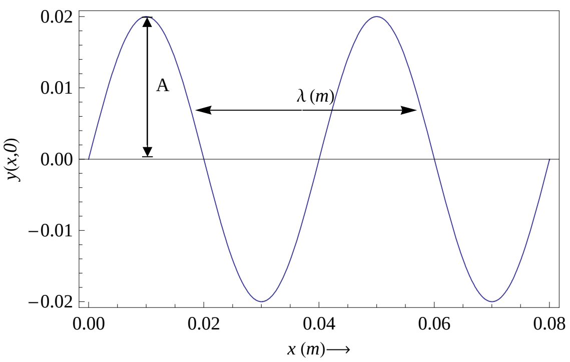
Solução

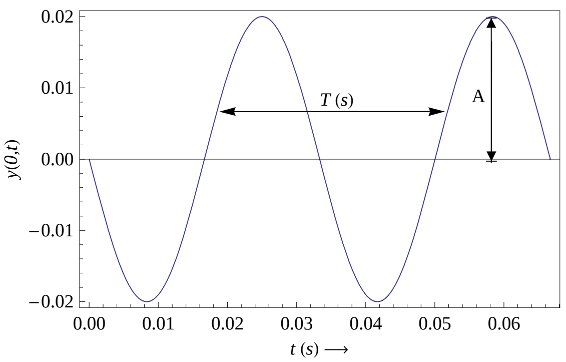
Para uma onda harmónica $y = A\, Sin[k\, x - \omega\, t]$, a velocidade de propagação corresponde à velocidade de fase $v_\varphi = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$. Como indicado a velocidade de fase é $v_\varphi = 1.2\, m/s$, e o número de ondas $k = 157\, m^{-1}$, pelo que o comprimento de onda é $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 4 \times 10^{-2}\, m$.

Da relação de dispersão $\omega = k\, v_\varphi$ obtém-se a velocidade angular $\omega = 157 \times 1.2 = 188.4\, \frac{rad}{s}$, e a partir desta o período $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.33 \times 10^{-2}\, s$.

$$\text{Temos assim que: } \begin{cases} \textit{Número de ondas:} & k = \frac{2\pi}{\lambda} & rad/m \\ \textit{Comprimento de onda:} & \lambda = v_\varphi\, T & m \\ \textit{Período:} & T = \frac{\lambda}{v_\varphi} & s \\ \textit{Frequência:} & f = \frac{1}{T} & ciclos/s \\ \textit{Velocidade angular:} & \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f & rad/s \\ \textit{Velocidade de fase} & v_\varphi = \frac{\omega}{k} & m/s \end{cases}$$

$$y[x,\, t] = (0.02\, m)\, Sin\left[\left(157\, m^{-1}\right) x - \left(188.4\, \frac{rad}{s}\right) t\right]$$





Problema 11.1

Escreva uma expressão para o perfil do campo eléctrico do uma onda EM que se propaga no vácuo na direcção positiva do eixo dos x, com uma frequência de $600\ THz$ (luz verde) e com uma amplitude do $8\ V/cm$. Qual é a amplitude do campo magnético associado ?

Solução

Para uma onda linearmente polarizada tem-se $\vec{\boldsymbol{E}}_o$ real e se ela se propaga na direcção positiva do eixo dos x, o seu vector de onda $\vec{\boldsymbol{k}} = k_x\, \vec{\boldsymbol{e}}_x$.

$$\vec{\boldsymbol{E}}[\vec{\boldsymbol{r}}, t] = \mathcal{R}e\left[\vec{\boldsymbol{E}}_o\, e^{i\left(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-\omega t\right)}\right] \quad ou \qquad \vec{\boldsymbol{E}}[\vec{\boldsymbol{r}}, t] = \vec{\boldsymbol{E}}_o\, Cos[k_x\, x - \omega\, t]$$

De acordo com a Lei de Gauss para o espaço livre de cargas a divergência de $\vec{\boldsymbol{E}}$ deve anular-se

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad \therefore \qquad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_o = 0$$

donde se conclui que $\vec{\boldsymbol{E}}$ deve ser perpendicular à direcção de propagação.

- Relembre que em geral fazendo

$$\vec{\boldsymbol{k}} = k_x\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + k_y\, \vec{\boldsymbol{e}}_y + k_z\, \vec{\boldsymbol{e}}_z \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{r}} = x\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + y\, \vec{\boldsymbol{e}}_y + z\, \vec{\boldsymbol{e}}_z \qquad se\ tem \qquad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} = k_x\, x + k_y\, y + k_z\, z$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(E_{o_x}\, Cos\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right]\right) = -k_x\, E_{o_x}\, Sin\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right] \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(E_{o_y}\, Cos\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right]\right) = -k_y\, E_{o_y}\, Sin\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right] \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(E_{o_z}\, Cos\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right]\right) = -k_z\, E_{o_z}\, Sin\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right] \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = -\left(k_x\, E_{o_x} + k_y\, E_{o_y} + k_z\, E_{o_z}\right) Sin\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right] = -\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_o\, Sin\left[\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega\, t\right] = 0 \qquad \therefore \qquad \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_o = 0$$

No caso presente $f = 600\times 10^{12}\ Hz$, pelo que a velocidade angular é

$$\omega = 2\,\pi\, f = 2\,\pi\times\ 600\times 10^{12} = 3.77\times 10^{15} (*\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\ *)$$

A partir da relação de dispersão no vácuo $\omega^2 = c^2\, |\vec{\boldsymbol{k}}|^2$ obtém-se

$$\frac{\omega}{k} = c = 2.99792458\times 10^8\ (*\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ *) \qquad \therefore \qquad k = \frac{\omega}{c} = 1.2575\times 10^7\ (*\ \text{m}^{-1}\ *)$$

Da amplitude declarada do campo $E_o = 8\times 10^2\ \frac{V}{m}$ obtém-se

$$\vec{\boldsymbol{E}}[\vec{\boldsymbol{r}}, t] = 8\times 10^2\left(Cos[\phi]\, \vec{\boldsymbol{e}}_y + Sin[\phi]\, \vec{\boldsymbol{e}}_z\right) Cos\left[1.2575\times 10^7\, x - 3.77\times 10^{15}\, t\right]$$

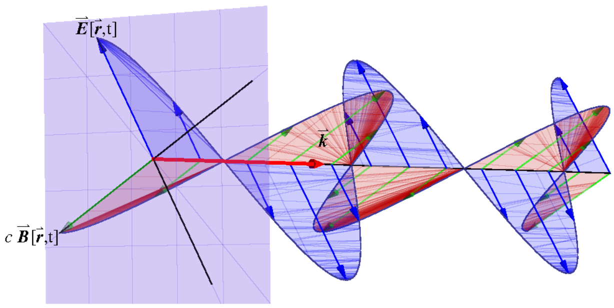
O campo magnético associado $\vec{B}$ verifica $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pelo que

$$\vec{B}\left[\vec{r},\, t\right] = \mathcal{R}e\left[\vec{B}_o\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t\right)}\right] \qquad ou \quad \vec{B}\left[\vec{r},\, t\right] = \vec{B}_o\, Cos[k_x\, x - \omega\, t]$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \therefore \qquad \vec{k} \times \vec{E}_o = \omega\, \vec{B}_o$$

O campo magnético é perpendicular simultâneamente a $\vec{E}$ e à direcção de propagação definida por $\vec{k}$. A sua magnitude é definida a partir do módulo desta relação $\left|\vec{k} \times \vec{E}_o\right| = \omega\, |\vec{B}_o|$ donde se conclui que

$$|\vec{B}_o| = \frac{k}{\omega}\, |\vec{E}_o| = \frac{1}{c}\, |\vec{E}_o| = \frac{1}{2.99792458 \times 10^8} \times 8 \times 10^2 \ = 2.67 \times 10^{-6} (*\ \mathrm{T}\ *)$$



Numa onda plana o campo eléctrico é igual em todos os pontos dum plano perpendicular a $\vec{k}$ (i.e. um plano de fase), mas oscila no tempo nesse plano. Na imagem vemos uma fotografia no instante *t* do valor do campo nos pontos sobre uma recta perpendicular a um plano de fase. Esta imagem repete-se para todos os pontos do plano de fase inicial. Igualmente representado está o vector $c\,\vec{B}$ proporcional ao campo magnético.

Problema 11.4

Considere que a luz solar tem uma intensidade do $1\,kWm^{-2}$. Qual é o valor médio do campo eléctrico da luz soIar? Qual é o valor médio do campo magnético da luz solar? Qual é o valor da energia electromagnética associada a essa luz solar num cubo de ar de $5\,m$ de lado?

Solução

O vector de Poynting $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B} = \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\,\vec{E}\times\left(\vec{n}\times\vec{E}\right) = c\,\epsilon_o\,|\vec{E}|^2\,\vec{n}$, onde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}}$ é a velocidade da luz no vácuo, é a taxa de fluxo de energia electromagnética por unidade de área, ou a potência transmitida por unidade de área. O seu módulo $\mathcal{S} = \left|\vec{E}\times\vec{H}\right|$ representa assim a energia transportada pela onda EM que atravessa uma unidade de área por segundo. Relembrando as definições $\vec{H} = \frac{1}{\mu_o}\vec{B}$, $\vec{D} = \epsilon_o\,\vec{E}$ e que para uma onda plana $c\,|\vec{B}| = |\vec{E}|$,tem- se

$$\mathcal{S} = |\vec{S}| = c\,\epsilon_o\,|\vec{E}|^2 = \frac{c}{\mu_o}\,|\vec{B}|^2$$

O seu valor médio no tempo designa-se intensidade da onda $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \langle\mathcal{S}\rangle = c\,\epsilon_o\left\langle E^2\right\rangle = c\,\epsilon_o\,\frac{1}{2}\,E_o^2$$

$$\langle\mathcal{S}\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left|\vec{E}\times\vec{H}\right|dt = \lim_{\tau\to\infty}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\,\frac{E_o^2}{\tau}\int_o^\tau Cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \frac{2\pi}{T}t\right]^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}\,E_o^2$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Cos[\alpha\,t]^2\,dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1 + Cos[2\,\alpha\,t]}{2}\,dt = \frac{1}{2} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{Sin[2\,\alpha\,\tau]}{4\,\alpha\,\tau} = \frac{1}{2}$$

Daqui se conclui que (relembrando a definição $\frac{1}{4\pi\epsilon_o} = 10^{-7}\,c^2$)

$$\left\langle|\vec{E}|\right\rangle \equiv \sqrt{\left\langle E^2\right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,E_o = \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{c\,\epsilon_o}} = \sqrt{1\times10^3\times4\,\pi\times10^{-7}\times3\times10^8} \simeq 614\ (*\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ *)$$

$$\left\langle|\vec{B}|\right\rangle \equiv \frac{1}{c}\left\langle|\vec{E}|\right\rangle = \sqrt{\frac{\mu_o\,\mathcal{I}}{c}} = 2\times10^{-6}\ (*\ \mathrm{T}\ *)$$

Assumindo uma caixa com uma face de área A perpendicular a $\vec{S}$, toda a radiação EM à distância $\ell = c\times\Delta t$ desta face atravessa a área A dentro do intervalo de tempo Δt. Assim a energia EM deste volume $V = \ell\times A$ é igual a $\Delta\mathcal{E} = c\times\Delta t\times A\,\mathcal{W}_{em}$, onde $\mathcal{W}_{em} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$ designa a **densidade de energia no campo electromagnético**. Vemos portanto que a potência transmitida pela radiação por unidade de área é

$$\frac{1}{A}\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = c\,\mathcal{W}_{em} = \langle\mathcal{S}\rangle = \mathcal{I} \quad \therefore \qquad \mathcal{W}_{em} = \frac{\mathcal{I}}{c} = \frac{1\times 10^{3}}{3\times 10^{8}} = \frac{1}{3}\times 10^{-5}\ (* \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^{3}}\ *)$$

Para um cubo de ar com $5\,m$ de lado temos um volume $V = 125\,m^3$ pelo que a energia radiante no seu interior será

$$\mathcal{E} = \mathcal{W}_{em}\,V = 125\times\frac{1}{3}\times 10^{-5} = 4.17\times 10^{-4}(*\ \mathrm{J}\ *)$$