Mecânica e Ondas

Trabalho de Laboratório

Movimentos Oscilatórios num sistema Massa-Mola

Objectivo

Determinação da constante elástica de um mola. Estudo dos movimentos do sistema massa-mola.

1. Introdução

O sistema a estudar está ilustrado na foto da Figura 1 e consiste numa mola suspensa

Figure 1: Fotos da montagem a utilizar

num fio e que por sua vez suporta uma barrinha roscada que tem acoplado com uma massa de 150g ou de 200g e um pequeno disco de cor. O fio que suspende o conjunto encontra-se ligado, com o auxílio de uma roldana, a um pequeno pino montado fora do eixo de um disco motorizado controlado por uma fonte eléctrica.

Controlando a velocidade de rotação do disco podemos controlar a força de oscilação que se aplica ao sistema massa-mola. A montagem pode ser esquematizada de acordo com a figura 2.

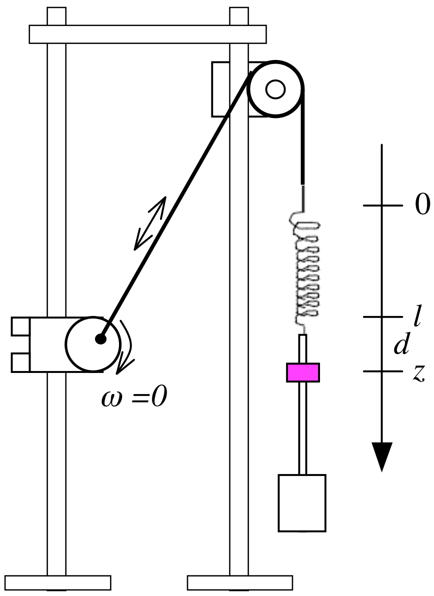

Figura 2: Esquema da montagem

A mola que se utiliza neste trabalho consiste numa espiral metálica cujo comprimento depende da massa que nela se encontra suspensa. De acordo com a Lei de Hook a força que a mola exerce é directamente proporcional à variação do seu alongamento. Se l_0 for o comprimento natural da mola então podemos escrever

$$\vec{F}_{el} = -K(l - l_0)\vec{e}_z = -K\Delta z\vec{e}_z \qquad (1)$$

$$\Delta z = z - d - l_0 \qquad (2)$$

onde K é constante elástica.

1.1 Situação de equilíbrio

Numa situação de equilíbrio tem-se que o peso da massa iguala a força elástica da mola e portanto

$$\vec{P} = -\vec{F}_{el} \qquad (3)$$

Como $P = mg$ e, de acordo com (2), temos $\Delta z_{eq} = z_{eq} - d - l_0$ obtém-se a posição de equilíbrio

$$z_{eq} = \frac{m}{K}g + (d + l_0) \qquad (4)$$

$$\Delta l = \frac{m}{K}g \qquad (4a)$$

onde m é a massa suspensa na mola e g a aceleração da gravidade.

A equação (3) pode ser utilizada para determinar a constante elástica da mola a partir do declive da recta definida por um conjunto de pares de valores $(\Delta l, m)$ como no exemplo da figura 3.

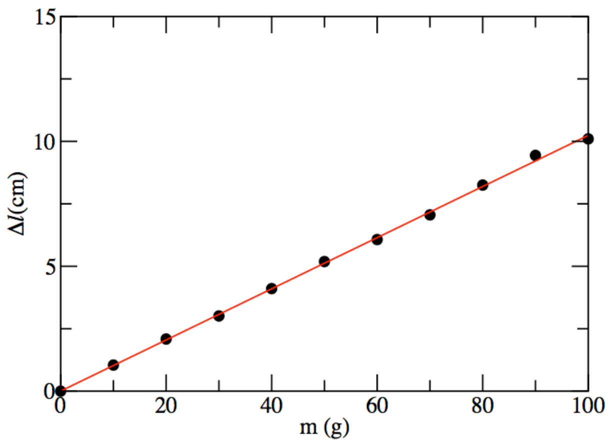

Figura 3: Variação de Δl com m. Recta obtida por ajuste segundo o ***método dos mínimos quadrados***

1.2 Regime oscilante livre amortecido

Numa situação que o sistema não está em equilíbrio a força total exercida no sistema tem uma resultante que depende do tempo e que se pode escrever da forma

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{A} \tag{5}$$

onde para além do peso temos que contar com a força de atrito $\vec{A}$. Ou seja

$$\vec{F}_{\text{total}} = m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \left(mg - K\Delta z - b\frac{dz}{dt}\right)\vec{e}_z \tag{6}$$

onde b é o coeficiente de atrito que depende do meio (neste caso ar) em que a massa se move e da forma do objecto. A força de atrito $\vec{A}$ tem apenas um termo linear na velocidade porque as velocidades são pequenas[1]. Em física utiliza-se muitas vezes uma outra notação mais compacta para as derivadas de uma função em ordem ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \dot{z}(t) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \ddot{z}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

o que permite, reordenando os termos, escrever a equação (6) da forma

$$m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) - mg + K\Delta z(t) = 0 \tag{8}$$

Como com o auxílio de (4) podemos escrever

[1] Para velocidades mais elevadas (ex: avião, foguetão,…) ter-se-iam de considerar termos de ordem superior na velocidade, i.e. termos dependentes do quadrado, cubo,…etc. da velocidade.

$$\Delta z(t) = z(t) - z_{eq} + \frac{m}{K}g \tag{9}$$

então

$$m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) - K\left(z(t) - z_{eq}\right) = 0 \tag{10}$$

e fazendo a mudança de variável $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ que corresponde a medir a amplitude das oscilações em relação ao ponto de equilíbrio temos

$$\ddot{Z}(t) + \frac{b}{m}\dot{Z}(t) + \frac{K}{m}Z(t) = 0 \tag{11}$$

A equação que se obtém tem a designação de equação diferencial homogénea do 2º grau e relaciona na mesma equação a função *Z(t)* com as suas 1ª e 2ª derivadas o que em geral torna um pouco mais difícil a sua resolução. Para a resolvermos podemos começar por escreve-la na seguinte forma

$$\ddot{Z}(t) + 2\lambda\dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = 0 \tag{12}$$

em que

$$\lambda = \frac{b}{2m} \tag{13}$$

tem a designação ***coeficiente de amortecimento*** e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 2\pi f_0 \tag{14}$$

tem a designação de ***frequência própria*** do sistema. Um pouco à semelhança do processo do cálculo da primitiva de funções a resposta à pergunta "*Qual é a função Z(t) que satisfaz a equação (12)?*" passa por encontar uma função cuja 1ª e 2ª derivadas seja idêntica a ela própria. Facilmente se verifica que uma função do tipo e^t satisfaz essa condição. Vejamos: se

$$Z(t) = Z_0 e^{st} \tag{15}$$

em que Z_0 e s são constantes, então

e

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= sZ(t) \\ \ddot{Z}(t) &= s^2 Z(t) \end{aligned} \tag{16}$$

donde substituindo (15) e (16) em (12) obtém-se

$$s^2 Z(t) + 2\lambda s Z(t) + \omega_0^2 Z(t) = 0 \tag{17}$$

Para (17) poder ser válida para qualquer instante de tempo temos de ter

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0 \tag{18}$$

ou seja

$$s = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{19}$$

Para que a equação (15) possa ser solução da equação (12) o parâmetro s tem de ser uma raiz do polinómio de 2º grau (18). Existem 3 casos possíveis: *i*) $\lambda > \omega_0$, *ii*) $\lambda = \omega_0$ e *iii*) $\lambda < \omega_0$. Os casos (*i*) e (*ii*) correspondem a valores de s reais e conduzem a funções $Z(t)$ que são combinações lineares de exponenciais decrescentes no tempo. Nestes dois casos não são observadas oscilações no sistema. Esta situação podem encontrar-se em sistemas com atrito muito elevado. O caso (*iii*) é o mais interessante para este trabalho. Os valores de s são números complexos que conduzem a funções oscilantes amortecidas. De facto (19) pode ser escrita na forma

$$s_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega \tag{20}$$

com

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{21}$$

e a solução de (12) escreve-se então da forma

$$Z(t) = A_1 e^{-\lambda t} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\lambda t} e^{-j\omega t} \tag{22}$$

Se considerearmos que A_1 e A_2 se podem escrever da forma $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{j\varphi}$, $A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi}$ e que a partir das expressões de *Euler* $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ e $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$ se tem $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$ podemos após algumas manipulações algébricas escrever a equação (22) na forma equivalente

$$Z(t) = A_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{23}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{23a}$$

As constantes A_0 e φ só são definidas conhecendo a posição e a velocidade da massa num determinado instante do tempo (usualmente o instante inicial). T é o período de oscilação dos sistema.

Na figura 4 ilustra-se a evolução da amplitude máxima de oscilação da massa em torna da posição de equilíbrio.

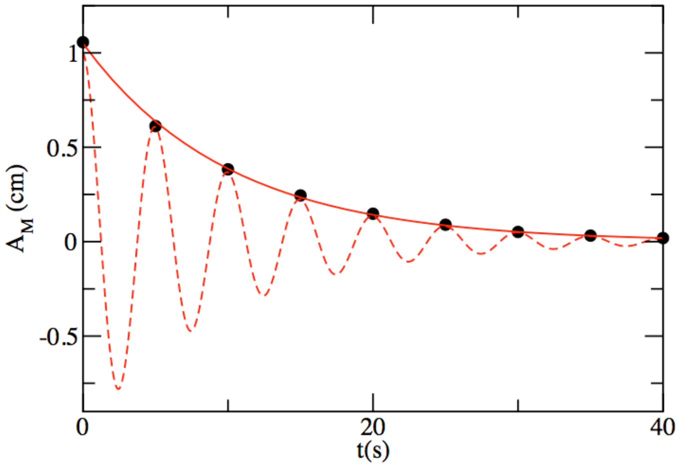

Figura 4: A curva a cheio ilustra a evolução da amplitude máxima de oscilação em torno da posição de equilíbrio $A_M(t) = A_0 e^{-\lambda t}$. A curva a tracejado representa a equação (23).

1.3 Regime forçado

Quando o disco a que está ligado o fio que suporta o sistema massa e mola roda com uma certa velocidade angular ω_a o fio que suporta a mola oscila com a frequência

$$f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} \tag{24}$$

e força a massa a oscilar com essa frequência (ver figura 5). Acontece que a amplitude de oscilação depende da frequência da rotação do disco. Para compreender de que forma a amplitude varia com a frequência convém começar por reescrever a equação de equilíbrio de forças aplicadas à massa tendo em conta a força excitadora $F_{ext} = F_0 \cos(\omega_a t)$. A equação (6) modifica-se e toma a seguinte forma

$$m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \left(mg - K\Delta z - b\frac{dz}{dt} - F_0\cos(\omega_a t)\right)\vec{e}_z \tag{25}$$

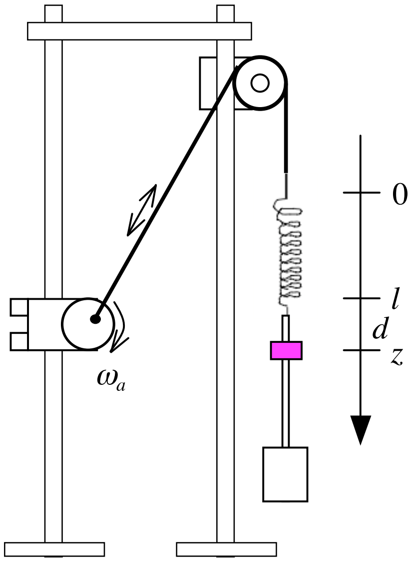

Figura 5: Sistema com oscilação forçada

donde se obtém

$$\ddot{Z}(t) + 2\lambda\dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_a t) \qquad (26)$$

com λ □ ω_0 dados pelas expressões (13) e (14).

A solução mais geral desta equação pode ser escrita como a soma de dois termos $Z(t) = Z_{\text{livre}}(t) + Z_{\text{forçado}}(t)$. $Z_{\text{livre}}(t)$ corresponde à situação em que não há força exterior (regime livre). $Z_{\text{forçado}}(t)$ corresponde à solução particular da equação (26) e que se pode escrever da forma

$$Z_{\text{forçado}}(t) = A_M \cos(\omega_a t - \alpha) \qquad (30)$$

A amplitude A_M pode ser obtida substituindo (30) na equação (26) e simplificando com o auxílio da identidade $e^{ja} = \cos(a) + j\sin(a)$. Obtém-se a seguinte expressão

$$A_M = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_a^2}} \qquad (31)$$

Para

$$\omega_a = \omega_{aR} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} \qquad (32)$$

verifica-se que a amplitude A_M é máxima e tem-se uma situação que se designa por ***ressonância***. A frequência

$$f_{aR} = \frac{\omega_{aR}}{2\pi} \qquad (33)$$

designa-se por ***frequência de ressonância***. Quando o coeficiente de amortecimento λ é pequeno (o que pode corresponder a pequenos atritos e/ou grandes massas) tem-se que na ressonância a amplitude de oscilação do sistema pode atingir valores que destruam o sistema. Situações deste género podem ocorrer em pontes e viadutos, asas dos aviões, quando as forças exteriores induzem oscilações com frequências próximas das frequências próprias desses sistemas.

A expressão (31) pode ser ajustada, pelo ***método dos mínimos quadrados*** a um conjunto de dados experimentais permitindo a determinação simultanea dos valores da frequência própria do sistema (f_0), coeficiente de amortecimento (λ) e A_0 (ver exemplo da figura 6).

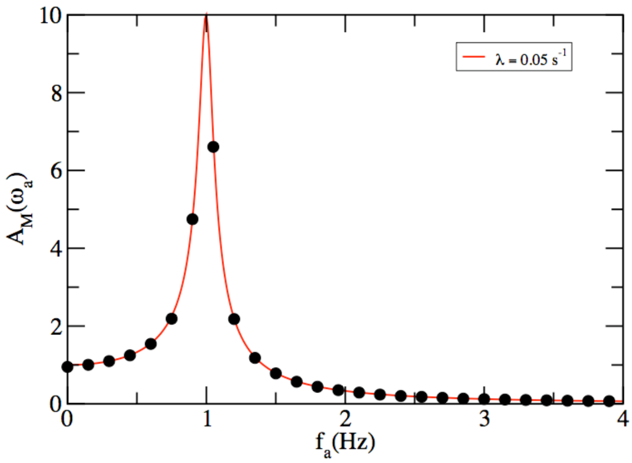

Figura 6: Curva de ressonância obtida por ajuste pelo método dos mínimos quadrados da expressão (31) a um conjunto de dados experimentais

2. Trabalho experimental

1) Para o trabalho experimental convém verificar a seguinte lista de material:
    1. Duas molas (k_1 = 6,4 N/m e k_2 = 10 N/m)
    2. Três massas: m_1 = 150g, m_2 = 200g (Ø = 35mm) e m_3 = 150g (Ø = 20mm)
    3. Disco amortecedor de 50g e diâmetro de 150 mm
    4. Armação de suporte
    5. Uma roldana
    6. Um motor com disco, pino excêntrico e marcação de cor
    7. Fonte de alimentação eléctrica
    8. Webcam USB Philips com tripé + Computador

2) Ligar o computador e lançar o programa Cinéris. Na janela de representação ("représentation") do lado direito (ver Figura 7) seleccionar o tab de video ("Vidéo") e deverá ver a imagem captada pela webcam.
3) A webcam deve se encontrar montada de tal forma que tenha uma boa visibilidade sobre o movimento oscilatório do marcador acoplado ao sistema massa-mola. Ajustar o tripé e a objectiva por forma que a imagem esteja direita e focada.
4) Na janela "atelier" do lado esquerdo seleccionar o tab de aquisição ("Acquisition") e neste seleccionar o tab aquisição rápida ("Vidéo rapide"). Seleccionar o directório onde quer guardar os seus filmes de aquisição em "Répertoire dês images et des vidéos". Escrever dentro deste tab: o nome de ficheiro ("Nom du fichier") - ____.avi; Duração máxima da sequência ("Durée maximale de la séquence") 10s; Numero de imagens por segundo ("Nombre d'images par seconde") 20.

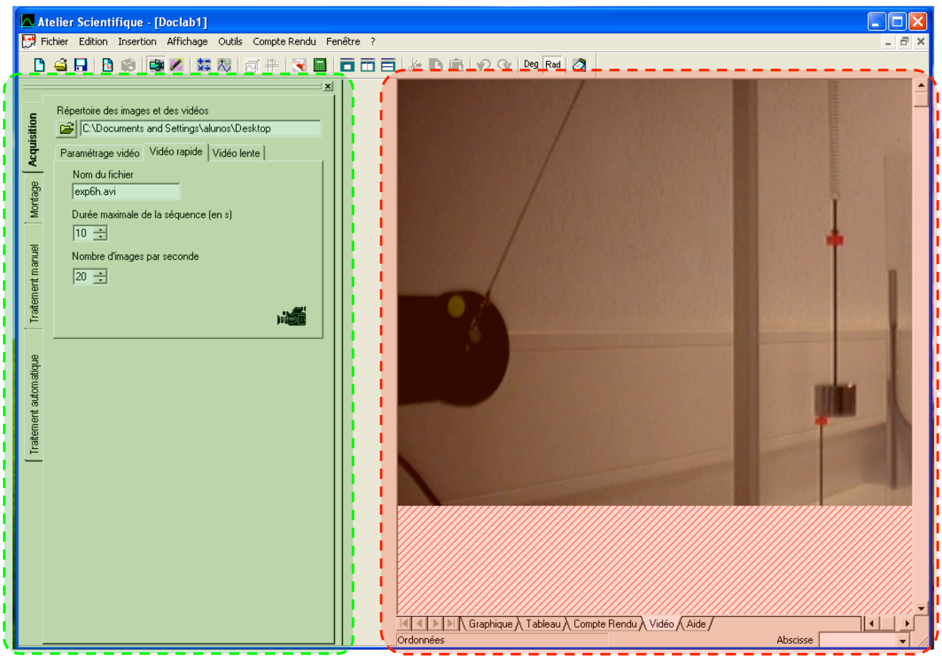

Figura 7: Janela do programa Cinéris com a janela de representação (área a vermelho) do lado direito e janela de "atelier" (área a verde) do lado esquerdo.

2.1 Determinação da frequência de oscilação

1) Registe o movimento oscilatório com as duas molas (k_1 e k_2) e com as duas massas (m_1 e m_2).
2) A mola deve ser suspensa pela argola da extremidade no fio que passa pela roldana e está ligado ao motor. O motor nesta altura deve se encontrar parado. A massa deve ser suspensa na argola da outra extremidade da mola usando o orifício barrinha roscada. Para por o sistema massa-mola a oscilar deve certificar que este se encontra perfeitamente parado e na vertical e depois puxar um pouco o fio (cerca de 1 cm) entre o motor e a roldana largando-o de seguida. Desta forma o sistema massa-mola começa a oscilar com o mínimo de movimento lateral. Tenha em atenção aos ***erros sistemáticos*** que pode estar a introduzir e tentar minimiza-los, por exemplo, conseguir com que o sistema no seu movimento praticamente não oscile na horizontal.
3) No programa Cinéris deve accionar o botão de aquisição  logo após ter largado o sistema massa-mola. Deixar de seguida aquisição chegar ao fim.
4) Para fazer a analise das imagens deve seleccionar a tab de tratamento automático ("Traitement automatique") na janela "atelier" do lado esquerdo:
    a) Seleccionar o ficheiro .avi no "Choix du fichier" onde foi gravado o movimento. (sugestão: carregar no botão com a pasta)
    b) No tab "Etalonnage" começamos pelo quadro "Origine" onde deve escolher um ponto numa imagem a origem das coordenadas. De seguida no quadro "Abscisses/Ordonnées" deve seleccionar os eixos das ordenadas clicando e deslocando o rato na imagem. O ponto de inicio e do fim deve ser de um objecto que conheça bem as suas dimensões. Na janela de calibração que aparecerá de seguida deve introduzir o valor da distância em metros correspondente. (nota: o carácter das décimas é a virgula)
    c) No tab "Cadre de travail" deve seleccionar a área da imagem com o rato onde o disco de cor se movimenta.
    d) No tab "Paramétrage" no quadro "Sélection des objets" deve seleccionar o centro do disco de cor e se necessário ajustar o contraste por forma ao software reconhecer só o disco na imagem. (Desactivar o "Trajectoires uniquement" para termos x e y em função do tempo.)
    e) Carregar no botão de inicio do tratamento  no quadro "Traitment" e deixar o tratamento chegar ao fim.

5) Na janela de representação do lado direito seleccionar o tab "Graphique" onde estão representados as coordenadas dos pontos adquiridos em função do tempo. Verificar se a oscilação em X é pequena em comparação com Y e pode eliminá-la. Seleccionando na barra de cima o "Atilier modélisation"  poderá fazer o ajuste de uma curva sinusoidal e determinar o período de oscilação do movimento. Para tal deve seleccionar os pontos na direcção Y (t) (vertical) escolher em "Modèles prédéfinis" a curva "Sinusoide" e ajustar os parâmetros por forma a encontrar o melhor ajuste possível. (Por vezes tem de

introduzir manualmente alguns valores nos parâmetros por forma a encontrar mais facilmente o melhor ajuste)

2.2 Determinação do coeficiente de amortecimento

1) Coloque a massa m_1 = 150g de diâmetro mais pequeno na mola k_2 = 10 N/m e colocar o sistema dentro do tubo acrílico com água. A quantidade de água deve ser a suficiente para que a massa esteja sempre imersa durante o seu movimento.
2) Registe o movimento oscilatório do sistema para uma duração de 10s e uma taxa de aquisição de imagens de 20 imagens por segundo.
3) Trate as imagens de forma igual à parte anterior.
4) Meça o período T de oscilação livre do sistema seleccionando no "Atilier modélisation" uma função sinusoidal com amortecimento. Para tal pode efectuar o mesmo procedimento do ponto 5 na experiência anterior mas usando a função "Sinusóide amortie".
5) A partir da amplitude de oscilação dada no gráfico e da curva de ajuste determine o coeficiente de amortecimento λ.
6) Compare o valor da frequência própria das oscilações com o valor esperado calculado a partir da expressão (14) e com o caso anterior da mesma mola e massa m_1 = 150g.
7) (Opcional) Pode variar as condições de atrito verificar quais as alterações no valor da constante de amortecimento. Coloque a massa m_1 = 150g na mola k_2 = 10 N/m e adicionar o disco de acrílico preto na barrinha roscada (atenção que este disco tem uma massa de 50g). Por forma a ter espaço para colocar o disco deve afastar a roldana da armação de suporte.

2.3 Determinação da frequência de ressonância do sistema

1) Use as mesmas condições da parte anterior. Coloque a massa m_1 = 150g de diâmetro mais pequeno na mola k_2 = 10 N/m e colocar o sistema dentro do tubo acrílico com água.
2) Posicione a webcam por forma a visualizar na mesma imagem o disco de cor acoplado ao sistema massa-mola.
3) Verifique que o controle de velocidade do motor na fonte de alimentação está no mínimo. Ligue a fonte e varie a tenção até obter a frequência de rotação para o qual a amplitude de oscilação é máxima (ressonância). A quantidade de água deve ser tal para que a só massa esteja sempre imersa durante o seu movimento.
4) Registe o movimento do sistema massa-mola tal como nas partes anteriores.
5) Com base nos gráficos do movimento sistema massa-mola pode determinar a amplitude de oscilação do sistema massa-mola. (Nota: ao fim de algum tempo a frequência do motor e do sistema massa-mola são idênticas por isso deve esperar que a oscilação transiente passe)
6) Determine a frequência de oscilação na ressonância e compare o valor obtido com o valor esperado calculado a partir do valor da frequência própria obtida em 2.1 e 2.2.

7) (Opcional) Registe os valores de frequência e amplitude de oscilação para valores inferiores e superiores à frequência de ressonância. Efectue um ajuste da função (31) aos seus dados experimentais (pode escolher fazê-lo no Excel usando nas ordenadas $1/A^2$ e nas abcissas f_a^2 e escolhendo para curva de ajuste um polinómio de segundo grau). Compare os valores da frequência própria e do coeficiente de amortecimento obtidos do ajuste com os valores obtidos anteriormente.

Bibliografia

- Contribuição para o Desenvolvimento do Ensino da Física Experimental no IST, A. Ribeiro, P. Sebastião, F. Tomé, Departamento de Física do IST (1996).
- Tratamento e Apresentação de Dados Experimentais, M. R. da Silva, DF, IST, 2003
- Introdução à Física, J. Dias de Deus, M. Pimenta, A. Noronha, T. Peña, P. Brogueira, McGraw-Hill (1992).

Mecânica e Ondas

Relatório
(destaque para entregar no fim da aula ao docente)

Movimentos Oscilatórios num sistema Massa-Mola

Nº	Nome	Curso

Data	Turno	Grupo

1. Objectivo deste trabalho:

2. Determinação da frequência de oscilação

2.1 Valor dos períodos e frequências próprias de oscilação para as molas k_1 e k_2 com as massas m_1 e m_2 calculados através da expressão (14)

m **(g)**	***K*** **(N/m)**	***T*** **(s)**	***f*** **(Hz)**
150	**6,4**		
150	**10**		
200	**10**		

2.2 Valor dos períodos e frequências próprias de oscilação para as molas k_1 e k_2 com as massas m_1 e m_2 a partir dos dados experimentais

m **(g)**	***K*** **(N/m)**	***T*** **(s)**	***f*** **(Hz)**
150	**6,4**		
150	**10**		
200	**10**		

2.3 Compare e comente os valores experimentais com os teóricos. Será que deveriam dar iguais? Existe ou não um desvio sistemático? Avalie os factores de erros envolvidos na experiência.

3 Determinação do coeficiente de amortecimento

Massa total suspensa na mola:__________________

Coeficiente de restituição da mola:__________________

Com base nos gráficos dos pontos experimentais obtenha os seguintes valores:

3.1 Valor do coeficente de amortecimento e o período de oscilação obtidos a partir do ajuste da expressão $A = A_0 \sin(2\pi\, t/T + \varphi)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ aos dados experimentais:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$T =$ __________________;

3.2 Qual o valor da frequência de oscilação a partir do período de oscilação livre T.

$f =$ _______________

Compare com o valor obtido na primeira parte f_0 com a mesma mola e a mesma massa. E entrando com a influência do valor de λ na eq. (21) quais são as diferenças ($\omega = 2\pi\, f$) ? Comente atendendo às expressões para a frequência própria (14) do sistema e para a frequência de oscilação no regime oscilante livre amortecido (21):

3.2.1 Que diferenças observaria na oscilação (amplitude e frequência) se utilizasse outras condições de atrito? E se utilizasse outra massa?

3.3 (Opcional) Experimente para outras condições de atrito (disco preto).

4 Determinação da frequência de ressonância do sistema

Período de oscilação do sistema na ressonância : ___________________

4.1 Estime o valor da frequência de ressonância a partir do período do ajuste sinusoidal aos valores de amplitude da oscilação:

f_R = _________________

4.2 Estime a frequência própria do sistema a partir da frequência de ressonânia entrando com λ obtido anteriormente na eq. (32):

f_0 = _________________

Compare o valor obtido com aqueles que calculou a anteriormente. Comente:

4.3 Que diferenças observaria na oscilação (amplitude e frequência) se utilizasse outras condições de atrito? E se utilizasse outra massa?

4.4 (Opcional) Variando a velocidade do motor excêntrico preencha a partir dos dados experimentais a seguinte tabela:

T_a(s)	f_a(Hz)	A_M (m)

4.5 (Opcional) Valor do coeficente de amortecimento, da amplitude inicial e da frequência própria do sistema obtidos a partir do ajuste da expressão $A_M = \dfrac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_a^2}}$ aos dados experimentais:

λ = ___________________

A_0 = ___________________

f_0 = ___________________

Compare estes valores com os que obteve no pontos 2 e 3.

Nota: para fazer o ajuste em Excel deve usar a expressão polinomial de 2º grau

$$\frac{1}{A_M^2} = \frac{1}{A_0^2}\left(\omega_a^2\right)^2 + \frac{\left(4\lambda^2 - 2\omega_0^2\right)}{A_0^2}\omega_a^2 + \frac{\omega_0^4}{A_0^2}$$

5 Conclusões