2º Teste e 1º Exame
Termodinâmica e Estrutura da Matéria
MEFT, MEBM & LMAC
14 de Janeiro de 2014, 11h30
Duração: 1h30 (Teste) e 3h00 (Exame)
Prof. Responsável: João P. S. Bizarro

ATENÇÃO: **O Teste corresponde aos Problemas 3 e 4.**
Por defeito, assume-se que os(as) Alunos(as) que permanecerem na sala passada 1h30 do início da prova escolheram fazer o Exame.
É permitido o uso de calculadoras, mas não de formulários.
Indique os cálculos intermédios ao resolver cada questão.
Resolva cada grupo numa folha separada (mas não as separe/desagrafe).

[Cotação: a) 1; bi) 1; bii) 1; ci) 1; cii) 1.]

1- Pretende-se estudar a termodinâmica de um gás ideal clássico monoatómico a partir do conhecimento de que a sua energia interna só depende da temperatura (e não do volume) e de que a pressão por ele exercida é dois terços da densidade de energia, ou seja: $E \equiv E(T)$ e $P = \frac{2}{3}\frac{E(T)}{V}$.

a) Mostre, então, que: $dS = E'(T)\frac{dT}{T} + \frac{2}{3}\frac{E(T)}{T}\frac{dV}{V}$, onde $E'(T) \equiv dE/dT$.

R: Do primeiro princípio, $dE = TdS - PdV$, resulta $dS = (1/T)dE + (P/T)dV = E'(T)dT/T + (2/3)[E(T)/T]dV/V$.

b) Mostre, de seguida, que a relação acima para a entropia implica que:

i) $\frac{dE}{E} = \frac{dT}{T}$

e, consequentemente, que a energia interna é proporcional a T:

ii) $E = CT$, onde C é independente de T e V.

Ri): Como $(\partial S/\partial T)_V = E'(T)/T$, e $(\partial S/\partial V)_T = (2/3)E(T)/VT$, e tendo-se ainda $(\partial/\partial V)_T(\partial S/\partial T)_V = (\partial/\partial T)_V(\partial S/\partial V)_T$, vem que $0 = (2/3)(1/VT)[E'(T) - E(T)/T]$, ou seja $dE/E = dT/T$.

Rii): Integrando o resultado acima, $\ln(E/E_0) = \ln(T/T_0)$, o que dá $E/T = E_0/T_0 = C$.

c) Mostre ainda que a variação na entropia deste gás entre os estados (T,V) e (T',V') é dada por:

i) $\Delta S = C\ln\frac{T'}{T} + \frac{2}{3}C\ln\frac{V'}{V}$

e, já agora, com o conhecimento que tem (ou deve ter) sobre o gás ideal clássico

ii) diga a que é que C deve ser igual.

Ri): De a) e b) vem que $dS = CdT/T + (2/3)CdV/V$, cuja integração é imediata e dá $\Delta S = C\ln(T/T') + (2/3)C\ln(V/V')$.

Rii): Como se sabe que, para um gás ideal clássico monoatómico se tem $\Delta S = (3/2)nR\ln(T/T') + nR\ln(V/V')$, vem que $C = (3/2)nR = (3/2)Nk_B$.

[Cotação: a) 1; b1) 1; bii) 1; ci) 1; cii) 1.]

2- É possível construir centrais eléctricas aproveitando a diferença de temperatura entre a superfície e o fundo do mar. No Hawai foi construído um protótipo em que as temperaturas à superfície e no fundo são, respectivamente, de 30 ºC e 18 ºC. Admita que este protótipo funciona como uma máquina de Carnot, permitindo a produção de 500 MW de potência eléctrica.

a) Calcule o rendimento desta central eléctrica. [Nota: se não resolveu esta alínea, pode tomar para as alíneas seguintes um rendimento de 5%.]

R: Da fórmula para o rendimento de uma máquina de Carnot: $\eta = 1 - T_{\text{ff}} / T_{\text{fq}} = 1 - 291.15 / 303.15 = 4.0\%$.

b) Em regime estacionário calcule:

i) a potência térmica extraída às águas superficiais;

ii) a potência térmica libertada para as águas profundas.

[Nota: se não resolveu estas alíneas, pode tomar para as alíneas seguintes as potências respectivas de 14000 MW e 13500 MW.]

Ri): Da definição de rendimento: $\dot{Q}_{\text{fq}} = P / \eta = 500 / 0.04 = 12500 \text{ MW}$.

Rii): Do primeiro princípio: $\dot{Q}_{\text{ff}} = \dot{Q}_{\text{fq}} - P = 12500 - 500 = 12000 \text{ MW}$.

c) Em regime estacionário calcule:

i) a variação de entropia, por unidade de tempo, das águas superficiais;

ii) a variação de entropia, por unidade de tempo, das águas profundas.

Ri): Para a fonte quente: $\Delta\dot{S}_{\text{fq}} = -\dot{Q}_{\text{fq}} / T_{\text{fq}} = -12500 / 303.15 = -41 \text{ MW/ºK}$.

Rii): Para a fonte fria: $\Delta\dot{S}_{\text{ff}} = +\dot{Q}_{\text{ff}} / T_{\text{ff}} = +12000 / 291.15 = 41 \text{ MW/ºK}$; ou então: $\Delta\dot{S}_{\text{ff}} = -\Delta\dot{S}_{\text{fq}} = 41 \text{ MW/ºK}$, porque o funcionamento da central é reversível.

[Cotação: a) 1; b) 1; c1) 1; cii) 1; d) 1.]

3- No modelo de Einstein para um sólido cristalino, os átomos da rede cristalina são tratados como osciladores harmónicos quânticos a três dimensões. Os níveis de energia para um oscilador a uma dimensão são dados por $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, com $n = 0, 1, 2, \ldots, \hbar$ a constante de Planck (dividida por 2π) e ω a frequência angular do oscilador. Assim sendo, uma rede cristalina com N átomos corresponde então a um sistema de $3N$ osciladores que se podem distribuir pelos níveis de energia dados acima e cuja função de partição é fácil de calcular, tendo-se para o seu logaritmo: $\ln Z = -3N\left[\frac{\beta\hbar\omega}{2} + \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]$, em que $\beta \equiv 1/k_{\text{B}}T$ e k_{B} é a constante de Boltzmann.

a) Mostre que a energia interna do sistema é dada por $\bar{E}(T) = 3N\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_{\text{B}}T} - 1}\right)$.

R: Tem-se: $\bar{E}(T) = -\partial \ln Z / \partial\beta = 3N[\hbar\omega/2 + \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega} / (1 - e^{-\beta\hbar\omega})] = 3N\hbar\omega[1/2 + 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)]$.

b) Obtenha o valor de $\bar{E}(T)$ a baixas temperaturas ($k_{\text{B}}T << \hbar\omega$) e interprete fisicamente o resultado.

R: Para $\beta\hbar\omega >> 1$, tem-se $e^{\beta\hbar\omega} >> 1$ e, consequentemente, $\bar{E}(T) \approx 3N\hbar\omega/2$, ou seja, os $3N$ osciladores estão quase todos no nível de energia mais baixo, tendo-se então $\bar{E}(T) \approx 3NE_0$, com $E_0 = \hbar\omega/2$.

c) A altas temperaturas ($k_{\text{B}}T >> \hbar\omega$),

i) obtenha o valor de $\bar{E}(T)$ e interprete fisicamente o resultado (à luz do teorema da equipartição);

ii) qual o valor do calor específico molar a volume constante da rede cristalina?

Ri): Para $\beta\hbar\omega << 1$, tem-se $e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega = 1 + \hbar\omega / k_{\text{B}}T$ e, consequentemente, $\bar{E}(T) \approx 3N\hbar\omega(1/2 + k_{\text{B}}T/\hbar\omega) \approx 3Nk_{\text{B}}T$, ou seja, os $3N$ osciladores comportam-se de forma clássica, tendo-se $\bar{E}(T) = 3N\bar{\varepsilon}$, com $\bar{\varepsilon} \approx 2 \times (k_{\text{B}}T/2)$.

Rii): Tem-se: $c_V(T)=(1/n)(\partial \bar{E}/\partial T)\approx 3(N/n)k_{\mathrm{B}}=3N_{\mathrm{A}}k_{\mathrm{B}}=3R$, que é a lei de Dulong-Petit.

d) Qual a entropia do sistema a baixas temperaturas? Interprete fisicamente o resultado.

R: Para $\beta\hbar\omega >> 1$, tem-se $\ln Z\approx -3N\beta\hbar\omega/2$ e $\bar{E}(T)\approx 3N\hbar\omega/2$, vindo então $S=k_{\mathrm{B}}(\ln Z+\beta\bar{E})\approx 0$, ou seja, estando praticamente todos os osciladores no nível E_0, há um único estado acessível, tendo-se $S=k_{\mathrm{B}}\ln\Omega\approx 0$ dado que $\Omega\approx 1$.

[Cotação: a) 1; b1) 1; bii) 1; c) 1; d) 1.]

4- A temperatura à superfície do Sol é $T_0\approx 5780\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}$ e o seu raio $R\approx 696\times 10^3\ \mathrm{km}$. A distância entre o Sol e a Terra é $L\approx 150\times 10^6\ \mathrm{km}$ e o raio desta $r\approx 6.37\times 10^3\ \mathrm{km}$. A velocidade da luz é $c=3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$ e as constantes de Wien e de Stefan-Boltzmann são, respectivamente, $B=2.898\times 10^{-3}\ \mathrm{m^oK}$ e $\sigma=5.670\times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}\,{}^oK^{-4}}$. No que segue, considere o Sol e a Terra como corpos negros.

a) Qual o comprimento de onda que corresponde ao máximo de potência radiada pelo Sol?

R: Tem-se: $\tilde{\lambda}=B/T_0=501\ \mathrm{nm}$.

b) Calcule:

i) a potência total radiada pelo Sol;

ii) o fluxo de energia solar incidente na Terra (potência total incidente na Terra dividida pela área desta). [Nota: se não resolveu esta alínea, pode tomar para as alíneas seguintes o valor de $360\ \mathrm{Wm^{-2}}$.]

Ri): Tem-se: $P_{\mathrm{Sol}}=\sigma 4\pi R^2T_0^4=3.85\times 10^{26}\ \mathrm{W}$.

Rii): Tem-se: $dP_{\mathrm{inc}}/dA=[\pi r^2(P_{\mathrm{Sol}}/4\pi L^2)]/4\pi r_0^2=P_{\mathrm{Sol}}/16\pi L^2=341\ \mathrm{W/m^2}$.

c) Com base nos valores acima, e em regime estacionário, estime a temperatura média à superfície da Terra resultante das trocas de radiação entre esta e o Sol. Comente o resultado obtido.

R: Em situação estacionária $dP_{\mathrm{inc}}/dA=\sigma T^4$, donde $T=[(dP_{\mathrm{inc}}/dA)/\sigma]^{1/4}=278\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}=5\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$, o que é um resultado muito bom como estimativa de uma temperatura média à superfície da Terra e que permite concluir que ela é essencialmente determinada pelas trocas de radiamento entre a Terra e o Sol.

d) A Terra está imersa no campo de radiação de fundo do Universo, o qual é semelhante à radiação emitida por um corpo negro a $T_{\mathrm{f}}\approx 3\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{K}$. Calcule a pressão exercida por esta radiação na superfície da Terra e compare-a com a pressão atmosférica. [Nota: a densidade de energia de um gás de fotões a uma dada temperatura é $u=(4/c)dP_{\mathrm{rad}}/dA$, com dP_{rad}/dA a potência radiada por unidade de área de um corpo negro à mesma temperatura.]

R: Tem-se: $P_{\mathrm{f}}=(1/3)u=(4/3c)(dP_{\mathrm{rad}}/dA)=(4\sigma/3c)T_{\mathrm{f}}^4=2.04\times 10^{-14}\ \mathrm{Pa}=2.01\times 10^{-19}\ \mathrm{atm}$, perfeitamente desprezável em face da pressão atmosférica, ou seja, $P_{\mathrm{f}} << P_{\mathrm{atm}}=1\ \mathrm{atm}$.